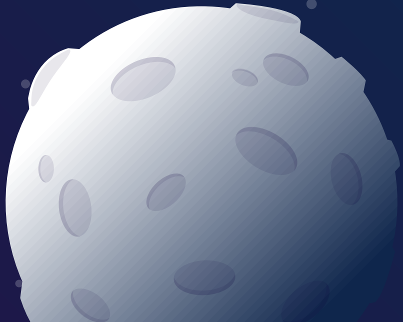
*A partir de una concepción solidaria de la Educación, que busca la construcción de aprendizajes significativos respetando las edades, idiosincrasias, intereses y tiempos de quienes aprenden, a partir de la práctica de la Didáctica de la Astronomía, considerada como disciplina autónoma, tratamos de contribuir a la transformación de la vida de las personas y las sociedades a través de una nueva relación con el cielo, la que proponemos se inicie a partir de la observación sistemática "a ojo desnudo" de los fenómenos astronómicos cotidianos*

# MATEMÁTICA DESDE LA ASTRONOMÍA


Parque Cielos del Sur
www.parquecielosdelsur.com.ar



Armando Eugenio Zandanet

# Escala
# Tierra - Luna

Diámetro 23/24 cm

Diámetro 6,4/6,7 cm

**Relación de tamaños**
**MUY SIMILAR**

Diámetro 12.742 km

Diámetro 3.474,2 km

Podríamos preguntar:
Si la pelota de básquet es la Tierra y la de tenis la Luna,
¿A qué distancia colocarías la de tenis para
Completar un modelo Tierra Luna?
Las respuestas son sorprendentes
La matemática tiene una respuesta:


$$\frac{\text{Diámetro de la Tierra}}{\text{Diámetro pelota basket}} = \frac{\text{Distancia Tierra Luna}}{\text{Distancia entre pelotas}}$$

## Distancia  promedio Tierra Luna 384.000 km

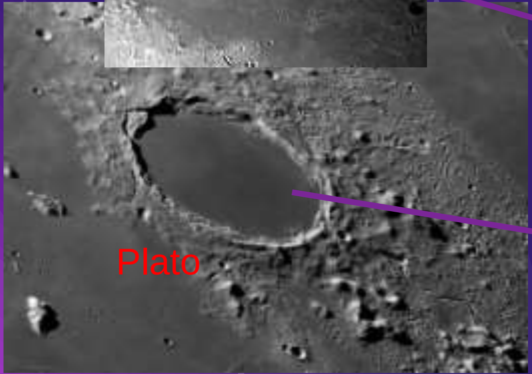
$$\text{Distancia entre pelotas} = \frac{24 \times 384000}{12742} = 723 \text{ cm}$$

## Proporción foto/objeto real

$$\text{Diámetro del cráter} = \frac{d_{cf} \times D_L}{d_{Lf}}$$

Sobre una foto de la Luna, se puede proponer medir mares, cráteres, montañas y determinar cuanto miden sabiendo el diámetro de la Luna



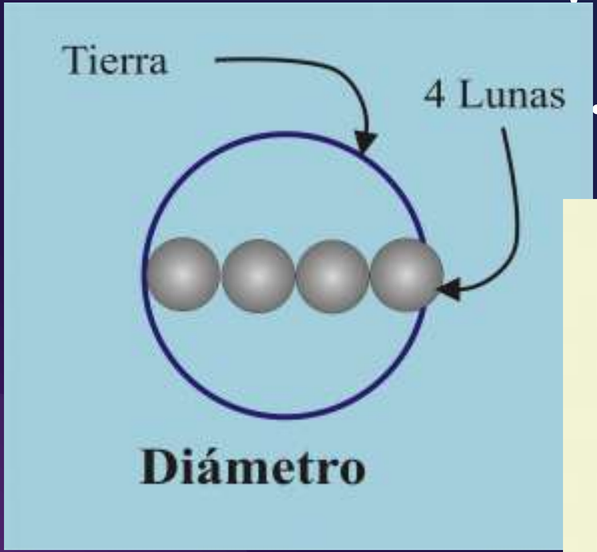


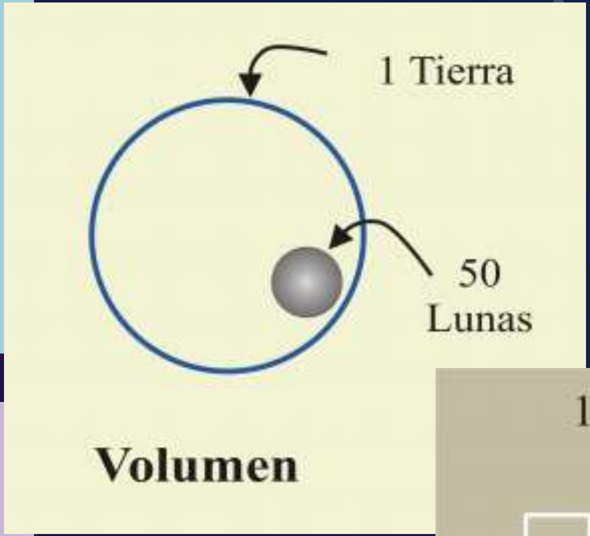

## Proporción foto/objeto real

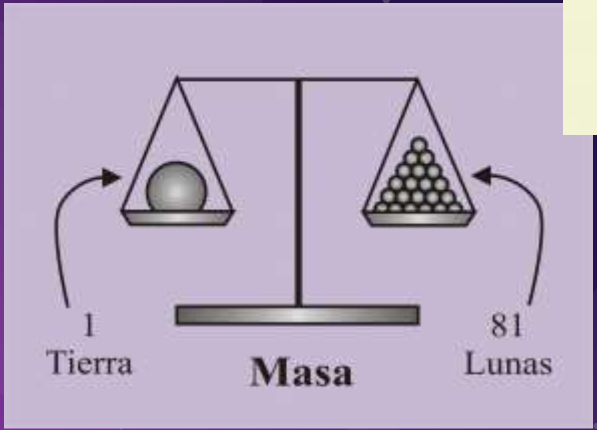
Con el mismo criterio, sobre una foto del Sol y sabiendo que el diámetro de éste es **1,3927 millones km**

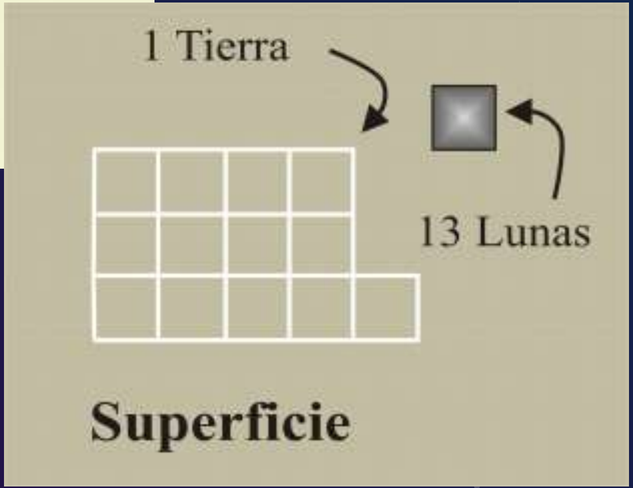
Puede medirse una mancha sobre la foto, luego el diámetro del Sol en la foto y aplicar proporciones

# Comparación Luna Tierra



# Sistema Solar a escala

| Planeta | Distancia comparada | Radio comparado | Distancia en km | Algunas distancias a escala, posibles de representar | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercurio | 0.39 | 0.38 | 57.910.000 | 0.39 m | 0.78 m |
| Venus | 0.72 | 0.95 | 108.200.000 | 0.72 m | 1.44 m |
| Tierra | 1.0 | 1.00 | 149.600.000 | 1.0 m | 2.0 m |
| Marte | 1.5 | 0.53 | 227.940.000 | 1.5 m | 3.0 m |
| Júpiter | 5.2 | 11 | 778.330.000 | 5.2 m | 10.4 m |
| Saturno | 9.5 | 9 | 1.429.400.000 | 9.5 m | 19 m |
| Urano | 19.2 | 4 | 2.870.990.000 | 19.2 m | 38.4 m |
| Neptuno | 30.1 | 4 | 4.504.300.000 | 30.1 m | 60.2 m |
| Planeta enano | | | | | |
| Plutón | 39.5 | 0.18 | 5.913.520.000 | 39.5 m | 79 m |
| Ceres | 2.77 | 0.074 | 413 000.000. | 2.77 m | 5.54 m |
| Eris | 67.67 | 0.19 | 14.400.000.000 | 67.67 m | 135.3 m |

En tiempos de Titus había una excepción: quedaba un hueco sin llenar a 2,8 UA. Tiempo más tarde se llenó cuando el 1 de enero de 1801 Giuseppe Piazzi descubrió Ceres, considerado hasta no hace mucho el mayor de los asteroides que giran alrededor del Sol, a unas 2,77 UA, y hoy es considerado un planeta enano según la nueva definición de planeta.

Para disponer de una escala podemos usar la Ley de Bode, una fórmula matemática inventada en el siglo dieciocho por un astrónomo llamado Johann Daniel Titius.
La relación se obtiene del siguiente modo: comienza la serie de números por el 0, agrega 3 y en adelante se duplica la cifra.
Así obtienes 0-3-6-12-24-48, etcétera.
Agrega 4 a cada uno de estos números, divide el resultado por 10 y obtendrás la siguiente progresión: 0,4 - 0,7 - 1,0 - 1,6 - 2,8 - 5,2 - 10,00 - 19,6 -38,8; que describe aproximadamente la posición de los planetas respecto del Sol.



**Dada las distancias planetarias, los alumnos podrían expresarlas en notación científica**


SOL
VENUS
TIERRA
MARTE


VENUS

Puede plantearse encontrar y aplicar una escala que permita representar con un límite de Tamaño y realizarlo sobre una tira de papel que luego se pliega en cuadrados de 6 x 6 cm. Otra opción son recortar 121 tarjetas de 6 x 6 cm, numerarlas e rrepresentando los Planetas en las tarjetas que correspondan. Por ejemplo:

En la tarjeta 1 cabe Mercurio y Venus, en la 2 la Tierra y así sucesivamente.

Las tarjetas vacías nos darán una idea del espacio vacío que hay entre planetas….

| **Planeta** | Distancia en **km** | **Escala 20 millones 1 cm** |
|---|---|---|
| Mercurio | **57.910.000** | **2,9** |
| Venus | **108.200.000** | **5,41** |
| Tierra | **149.600.000** | **7,48** |
| Marte | **227.940.000** | **14,9** |
| Júpiter | **778.330.000** | **38,9** |
| Saturno | **1.429.400.000** | **71,5** |
| Urano | **2.870.990.000** | **143.5** |
| Neptuno | **4.504.300.000** | **225,2** |
| **Planeta enano** | | |
| Ceres | **413 000.000.** | **20,6** |
| Plutón | **5.913.520.000** | **295,7** |
| Haumea | **6.428.500.000** | **321,4** |
| Makemake | **6.802.250.000** | **340,1** |
| Eris | **14.400.000.000** | **720** |

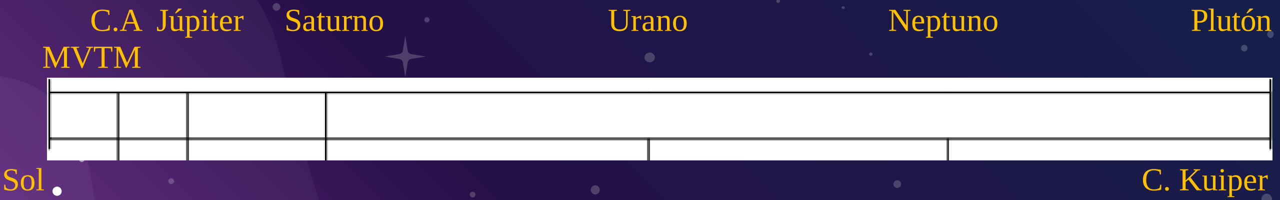
Construcción de un Sistema Solar a escala a partir de un rollo de papel higiénico

# Sistema Solar de bolsillo

Se trata de un pequeño modelo sencillo para dar una visión general de las distancias entre las órbitas de los planetas y otros objetos de nuestro sistema solar ya que somos conscientes de que uno de los grandes inconvenientes al acercar la Astronomía al alumno es el manejo de distancias y tamaños difíciles de asimilar, esta estrategia permite revisar las fracciones.

Partimos de una tira de papel (como las de máquina de calcular) de no menos de 1 m de largo con los extremos rectos.(sugiero 1,5 metros)
En uno de los extremos de la cinta, escribe o pon una etiqueta que diga: "Sol". En el otro extremo de la cinta, escribe: "Plutón / Cinturón de Kuiper".
A continuación, dobla la cinta por la mitad, marcar el centro con un pliegue, ábrela de nuevo y pon una marca en ese punto. Ahí está Urano.
Dobla ahora otra vez la cinta por la mitad, y esta a su vez por la mitad, de forma que ahora la cinta está dividida en cuatro partes, con el Sol en un extremo, Plutón en el otro, y Urano en el centro.
Marca esos dos nuevos pliegues que son la ¼ y la ¾ partes de la cinta respectivamente.
Abre la cinta. En la marca de ¼ de la cinta (el lado más cercano al Sol) está Saturno y en la otra marca, más cercana a Plutón, está Neptuno.
Observa ahora toda la cinta:
¿Qué parte del Sistema Solar ocupa las ¾ partes de tu cinta?
Así es, de momento sólo has hecho un inventario de los lugares más distantes: Saturno, Urano, Neptuno y Plutón.
Eso significa que todavía tienes 5 planetas más y el Cinturón de asteroides en la ¼ parte de cinta restante.
Dobla ahora por la mitad el trozo de cinta entre el Sol y Saturno y haz una marca. Ahí está Júpiter.
Ya tenemos los 4 planetas gigantes y Plutón.
El resto del Sistema Solar, incluidos nosotros, debe estar en la octava parte de cinta que queda. Dobla ahora la cinta entre el Sol y Júpiter por la mitad y marca el pliegue.
Ahí no hay planeta, pero está el Cinturón de Asteroides.

La cosa se complica un poco y ahora los pliegues serán muy pequeños.
Dobla por la mitad la parte de cinta entre el Sol y el Cinturón de Asteroides que acabas de localizar. Ahí está Marte. Ya queda menos.
¿Cuántos planetas te faltan? Tres. Así que entre el Sol y Marte has de hacer tres pliegues, o lo que es lo mismo, dobla una vez del Sol a Marte y otra vez el pliegue que tienes. Marca los pliegues.
Desdobla la cinta y tendrás las tres marcas que necesitas para situar los planetas que te faltan.
En la marca mas cercana al Sol, está Mercurio, en la marca del centro está Venus y en la siguiente mas cercana a Marte, estás tú!! (la Tierra)
Ya puedes abrir la cinta del todo y admirar tu nuevo Sistema Solar, que queda más o menos así:




Si tu modelo mide 1,5 metros de largo, ¿dónde estaría la estrella más cercana? (1,5 m = 40 UA, Próxima Centauro está a 4,3 años luz de distancia del Sol y 1 año luz = 63 250 UA)

https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/

La estrella más cercana estaría a unos 10 kilómetros

Imaginemos un ser vivo que nazca en el Sol y viaje por el sistema solar a razón de 50.000 km/h. Mientras crece el tiempo resulta ser **t = d/v**, por ejemplo para llegar a Mercurio tardaría 1158 hs que resultan de dividir 57900000/50000; si dividimos por 24 tendremos 48,25 días

| Planeta | Distancia en km | Edad en horas | Edad en días | Edad en años |
|---|---|---|---|---|
| Mercurio | 57.910.000 | 1158 | 48.25 | 0,13 |
| Venus | 108.200.000 | 2164 | 90.17 | 0.25 |
| Tierra | 149.600.000 | 2992 | 124.67 | 0.34 |
| Marte | 227.940.000 | 4558.8 | 189.95 | 0.52 |
| Júpiter | 778.330.000 | 15566.6 | 648.6 | 1.78 |
| Saturno | 1.429.400.000 | 25588 | 1066.17 | 2.92 |
| Urano | 2.870.990.000 | 57419.8 | 2392.5 | 6,55 |
| Neptuno | 4.504.300.000 | 90086 | 373.6 | 10,28 |
| Planeta enano | | | | |
| Ceres | 413 000.000. | 8260 | 344.17 | 0.94 |
| Plutón | 5.913.520.000 | 118270.4 | 4927.9 | 13.50 |
| Haumea | 6.428.500.000 | 128570 | 5357 | 14.68 |
| Makemake | 6.802.250.000 | 136045 | 5668.5 | 15.53 |
| Eris | 14.400.000.000 | 288000 | 12000 | 32.88 |
| Nube de Oort | 3.000.000.000.000 | 60000000 | 2500000 | 6849.3 |

Si tu vives en Chivilcoy, pero tienes parientes en Rosario, te separan a 283 kilómetros de distancia, si viajas en un auto que va a 100 kilómetros por hora puedes estar en Rosario en unas 3 horas. ¿Cómo sabemos esto? Mediante el uso de la fórmula: $t = d / r$ donde $t$ = tiempo, $d$ = distancia, y $r$ = velocidad a la que viajamos.


Un Boeing 737-700 de Aerolíneas Argentinas tiene una velocidad crucero de 833 km/h, si tuviera que unir Ushuaia con la Quiaca tardaría más de 6 horas. Para desplazarse una distancia equivalente a una vuelta a nuestro planeta necesitaría dos días. Y si con este avión pudiéramos viajar una distancia similar a la que nos separa del Sol (150.000.000 km) demandaría un tiempo de 7503 días, unos veinte años y medio..

- Si queremos comprender las distancias astronómicas, nuestra experiencia no nos sirve. Si utilizamos una escala donde el Sol tenga el tamaño de una naranja, la estrella más cercana, Próxima Centauri sería otra naranja a 4000 km de distancia. Las distancias son tan grandes que debemos recurrir a unidades propias de la Astronomía.

Para la ciencia contemporánea, la luz viaja en el vacío a la mayor velocidad posible: 300.000 km/s, comparada con ella, el auto de nuestro ejemplo se desplaza a razón de ¡0.0278 km por segundo!, mientras que nuestro avión de línea de bandera lo hace a 0,231 km por segundo. Es decir, la luz se mueve 10 millones 800 mil veces más rápido que el auto y un millón 296 mil 512 veces más rápido que nuestro avión. Siendo las distancias entre cuerpos celestes enormemente grandes, los astrónomos hablan de distancias en términos de cuanto tiempo le demanda a la luz recorrerla:

En un segundo recorre 300.000 Km En un minuto recorre 300.000 km x 60 segundos = 18.000.000 km. En una hora recorre 18.000.000 km x 60 minutos = 1.080.000.000 km. En un día recorre 1.080.000.000 km x 24 horas = 25.920.000.000 km. En **un año** recorre 25.920.000.000 km x 365 días = **9.460.800.000.000 km**.

Si pusiéramos en marcha un reloj cuando la luz sale del Sol, te invito a calcular el tiempo transcurrido para alcanzar la órbita de cada uno de los planetas sabiendo que en mercurio marca 3 minutos y 12 segundos, mientras que en la Tierra 8 minutos y 18 segundos:

| Mercurio | Venus | La Tierra | Marte | Júpiter | Saturno | Urano | Neptuno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00:03:12 | | 00:08:18 | | | | | |

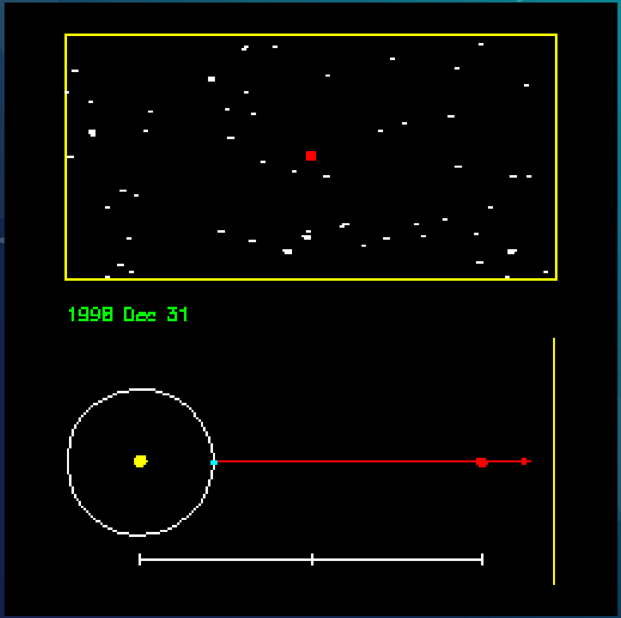
Las noticias procedentes de distintos lugares y momentos del universo conocido llegan aquí y ahora traídas por fotones, los "paquetitos" de luz que viajan a 299.792.458 m/s. Si bien son lo más rápido que existe necesitan tiempo para llegar desde su origen hasta nosotros. De modo que las "noticias" con las que construimos nuestra idea sobre el universo no son frescas, vienen del pasado….cuanto más lejana es la fuente, más antigua la noticia. Esto explica porque afirmamos que contemplar un cielo estrellado es mirar el pasado.

# El año luz


Tu, en el bus
Tu amigo
10 minutos
A
2 km
B
La luz
1 año
A
9.460.730.472.580,8 km
B
2 km son equivalentes a "10 minutos bus"
9.460.730.472.580,8 km son equivalentes a "1 año luz"

# Paralaje Trigonométrico

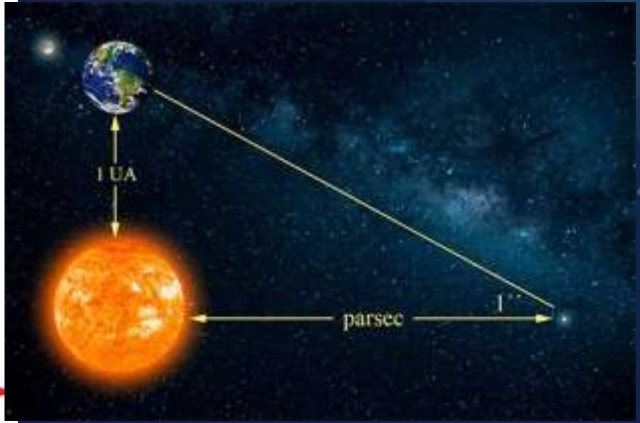

En este método se utiliza el fenómeno de la paralaje en dos observaciones separadas seis meses de un objeto relativamente cercano enfrentado al fondo “fijo” del cielo. Se resuelve el triángulo rectángulo de la figura, donde se conoce el ángulo de paralaje (mitad del desplazamiento medido entre las dos observaciones separadas 6 meses) y la distancia Tierra-Sol (150 millones de kilómetros) por trigonometría simple se resuelve la cantidad D, distancia que nos separa del objeto.




La **paralaje** es el ángulo formado por la dirección de dos líneas visuales relativas a la observación de un mismo objeto desde dos puntos distintos, suficientemente alejados entre sí y no alineados con él.

## Unidades Astronómicas

| Unidad | Concepto | Equivalente |
| --- | --- | --- |
| Unidad Astronómica (ua) | Distancia media entre Tierra y Sol | 149.600.000 km |
| Año Luz | Distancia que recorre la luz en un año. | 9.46 billones de km 63.235,3 ua |
| Pársec | | 30,86 billones de km 3,26 años luz 206.265 ua |




Su nombre se deriva del inglés parallax of one arc second.

En sentido estricto pársec se define como la distancia a la que una unidad astronómica subtiende un ángulo de un segundo de arco.

Se puede proponer que imaginen como seria una conversación por video-conferencia entre el Sol y cualquier planeta.

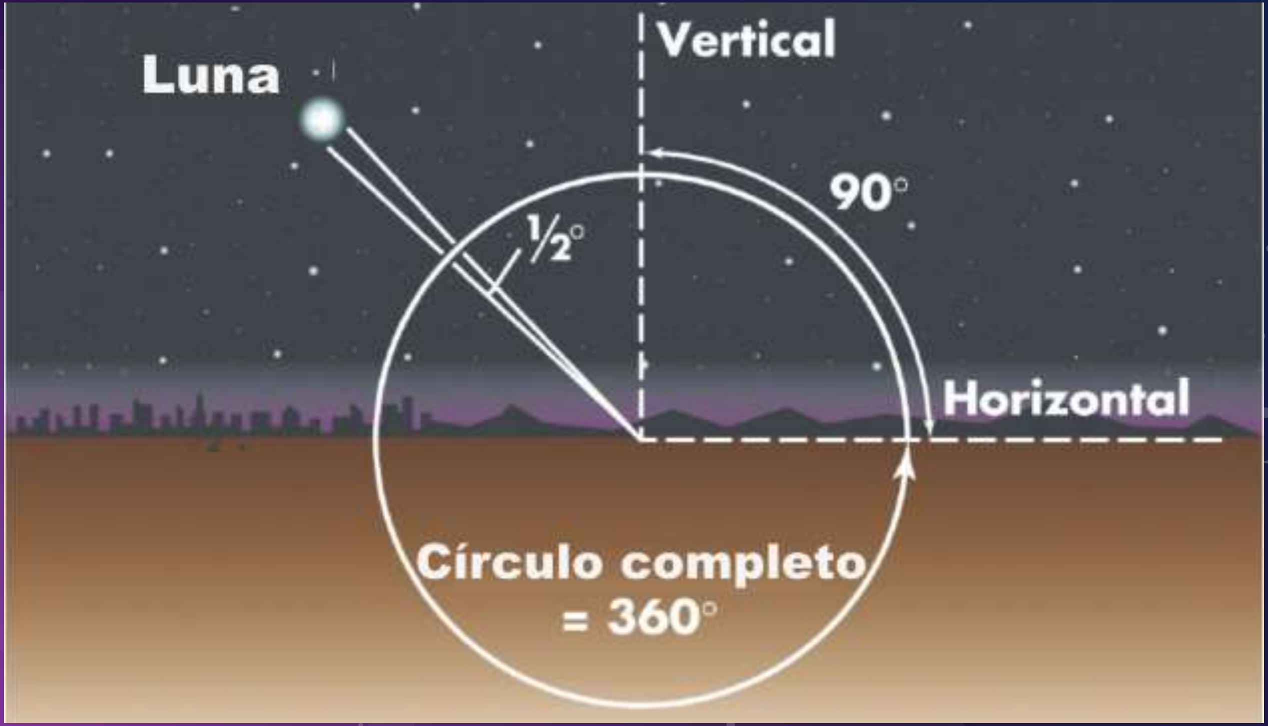
a) Cuánto tarda la luz del Sol  reflejada por la Luna, en llegar a la Tierra si está separada de esta por 384.000 km.

b) A qué distancia de la Tierra está la galaxia más próxima a la Vía Láctea (Andrómeda), si su luz tarda en llegarnos unos 2 millones de años.

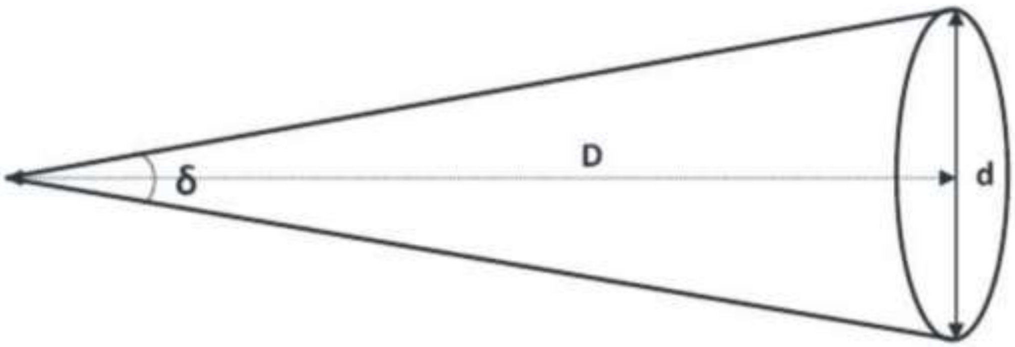
c) Una nave espacial que viajara a una velocidad de 80.000 km/s, ¿cuánto tardaría en llegar a la estrella Sirio que se encuentra a 8,6 años luz de distancia?

d) Para cruzar de un extremo a otro nuestra galaxia, la luz emplea 100.000 años ¿De cuantos millones de km se trata?

**Los astrónomos usan la medida angular para describir el tamaño aparente de un objeto celeste: ¿qué fracción del cielo parece cubrir ese objeto?**
**Si dibujas líneas desde tu ojo hasta dos bordes de la Luna, el ángulo entre las líneas es el tamaño angular de la Luna. Idéntico será la distancia entre Acrux y Gacrux.**




# Diámetro angular δ




$$\delta = 2\arctan\left(\frac{d}{2D}\right)$$

d es el diámetro del objeto
D es la distancia al objeto
δ es el diámetro angular en radianes

# Modelo TL para eclipses y fases

La construcción debe guardar la siguiente proporción:

*Diámetro de la esfera Tierra 3 cm*

*Diámetro de la esfera Luna 0.8 cm*

*Distancia mínima Tierra Luna 84,9 cm*

*Distancia media Tierra Luna 90,4 cm*

*Distancia máxima Tierra Luna 96,9 cm*

*Diámetro esfera x distancia Tierra Luna/diámetro de la Tierra*

# ¿CÓMO LA VEMOS?

En el hemisferio Sur,
la Luna crece iluminándose de izquierda a derecha.
Tiene forma de **“C”** cuando crece y de **“D”** cuando decrece Por eso podemos decir **“la Luna no miente”**

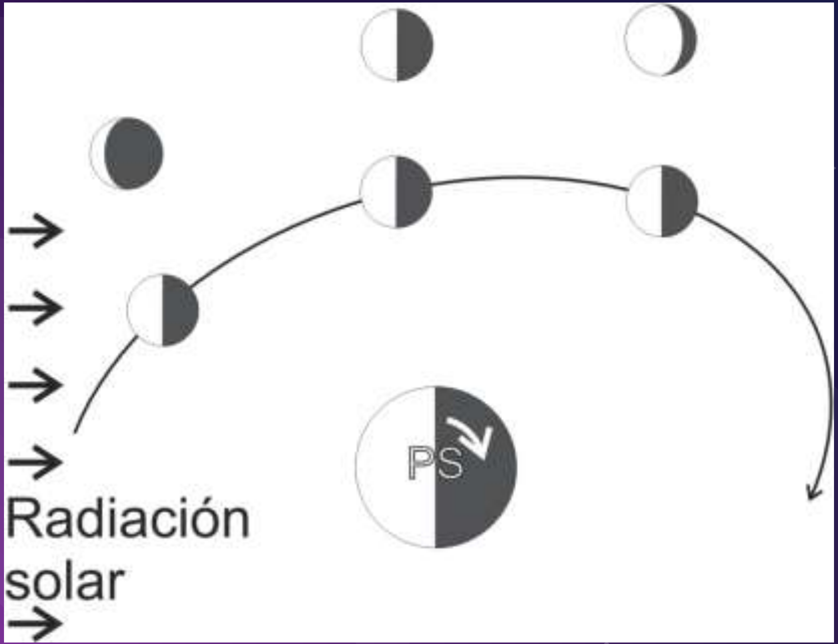




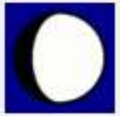


# ¿PORQUE LAS FASES?

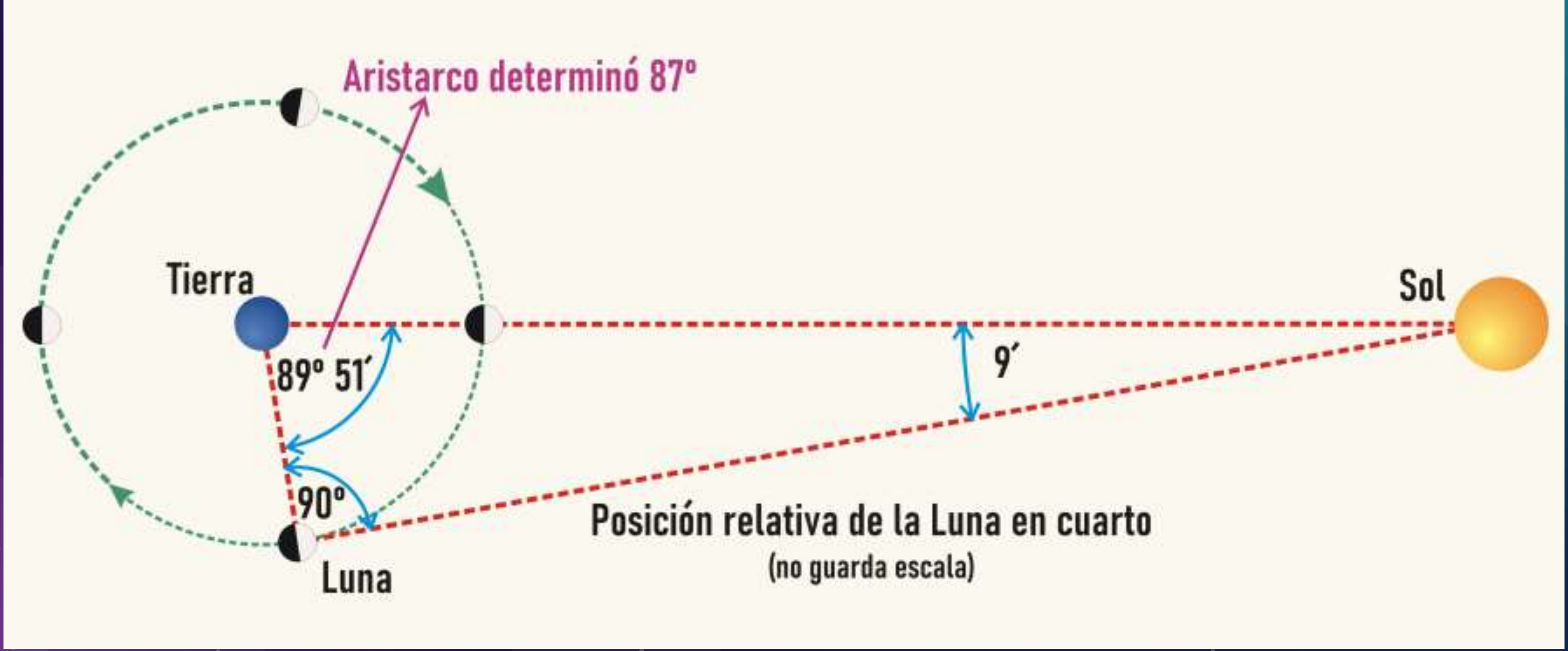
## Las formas que presenta la Luna son una consecuencia de su movimiento




Desde la Tierra vemos que la Luna nos presenta una apariencia cambiante con el paso del tiempo: es el fenómeno de las fases. La posición relativa del Sol, la Tierra y la Luna en cada momento da como resultado cómo vemos a esta última. Lo que vemos depende del lugar en el que estemos ubicados al observarlo: parados sobre la Tierra, viendo una parte de la Luna iluminada por el Sol (la zona de día en la Luna), y otra parte que no está iluminada por el Sol (la zona de noche en la Luna).

| Nombre | Hemisferio Norte | Hemisferio Sur | Parte visible de la Luna | Período visible |
|---|---|---|---|---|
| **Luna nueva** |  |  | 0-2% | No visible |
| *Luna creciente o creciente cóncava* |  |  | **Norte:** 3-34% *(izquierda)*<br>**Sur:** 3-34% *(derecha)* | Por la tarde y poco después de la puesta del sol |
| **Cuarto creciente** |  |  | **Norte:** 35-65% *(izquierda)*<br>**Sur:** 35-65% *(derecha)* | Por la tarde y en la primera mitad de la noche |
| *Luna creciente convexa o creciente gibosa* |  |  | **Norte:** 66-96% *(izquierda)*<br>**Sur:** 66-96% *(derecha)* | Por la tarde, gran parte de la noche |
| **Luna Llena** |  |  | 97-100% | Toda la noche |
| *Luna menguante convexa o menguante gibosa* |  |  | **Norte:** 96-66% *(izquierda)*<br>**Sur:** 96-66% *(derecha)* | Gran parte de la noche, comienzo de la mañana |
| **Cuarto menguante** |  |  | **Norte:** 65-35% *(izquierda)*<br>**Sur:** 65-35% *(derecha)* | Madrugada y de mañana |
| *Luna menguante o menguante cóncava* |  |  | **Norte:** 34-3% *(izquierda)*<br>**Sur:** 34-3% *(derecha)* | Fin de la madrugada y de mañana |

# Cálculo de Aristarco (310-230 a.C) acerca del Sistema Tierra-Luna-Sol




La Luna está en cuarto creciente (o menguante) sólo cuando el ángulo Sol-Luna-Tierra es de 90º. Aristarco determinó que en el instante del cuarto creciente, el ángulo bajo el que se observa desde la Tierra la distancia Sol Luna era de 87º

Cometió un error dada la dificultad en su época para determinar el instante en que la Luna está en cuarto. Hoy sabemos que su valor es 89º 51´. El razonamiento de Aristarco era correcto, y el proceso utilizado puede ser utilizado para enseñar.

**Aristarco**

$$\frac{TL}{TS} = \cos 87^{\circ} = 0{,}052$$

$$\frac{TS}{TL} = 19{,}11$$

**Actual**

$$\frac{TL}{TS} = \cos 89^{\circ}\, 51' = 0{,}00262$$

$$\frac{TS}{TL} = 382$$

Donde TS es la distancia Tierra Sol y TL la distancia Tierra Luna

**Consecuencia: el cuarto creciente se formará antes de que la Luna halla completado la cuarta parte de su lunación**

# Otro razonamiento de Aristarco

Dado que el diámetro observado de la Luna es de 0,5º, con 720 veces este diámetro cubrimos toda la trayectoria de la Luna en torno a la Tierra. La longitud del recorrido es $2\pi$ veces la distancia Tierra Luna

es decir: $2R_L 720 = 2\pi . D_{TL}$, despejando:

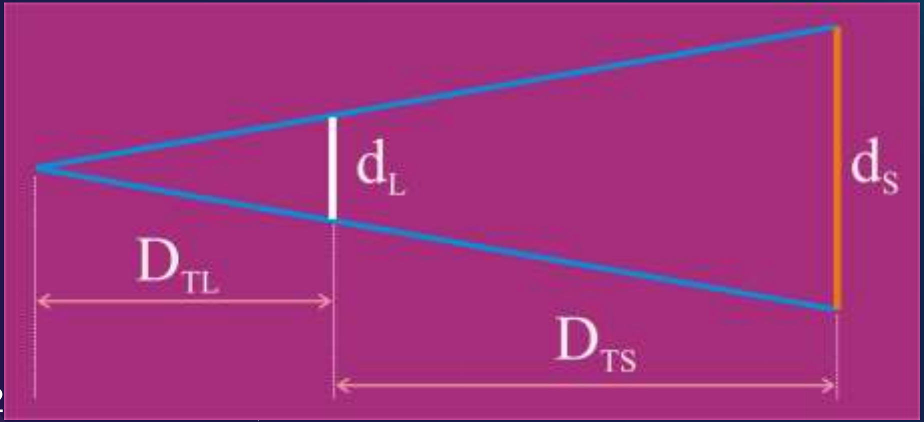
$$D_{TL} = \frac{720 . R_L}{\pi}$$

Con el mismo razonamiento:

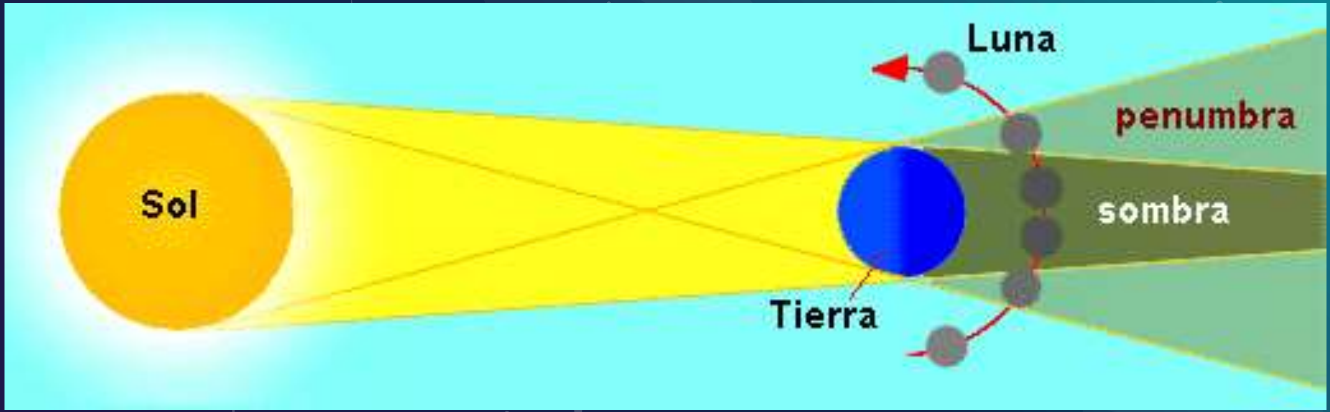
$$D_{TS} = \frac{720 . R_S}{\pi}$$

Aristarco logro comparar por primera vez, los diámetros del Sol, la Luna y la Tierra

$$\frac{D_{TS}}{D_{TL}} = \frac{d_S}{d_L}$$



# Geometría de un Eclipse de Luna



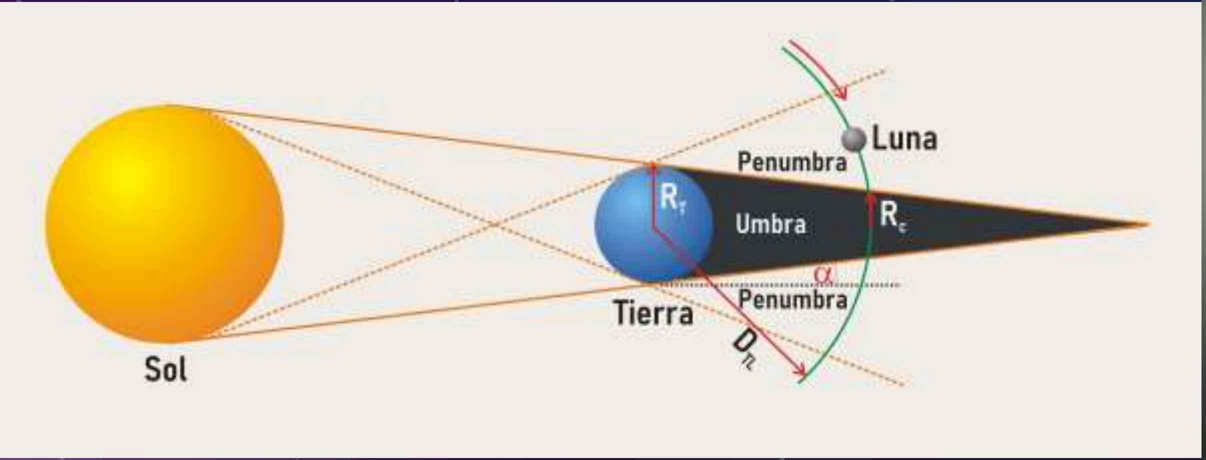


Aristarco de Samos utilizó un eclipse de Luna para comparar los diámetros del Sol, la Luna y la Tierra con la sombra que esta produce.

https://www.geogebra.org/m/JbqVjFgx

Coloca un papel transparente sobre la fotografía del eclipse y, a mano alzada, dibuja el contorno visible de la Luna y de la sombra de la Tierra.
Elige tres puntos en cada una de las circunferencias y calcula sus centros. (Puedes repetir el mismo proceso con otros tres puntos para asegurarte de que lo has hecho correctamente.)
Completa con un compás las dos circunferencias.

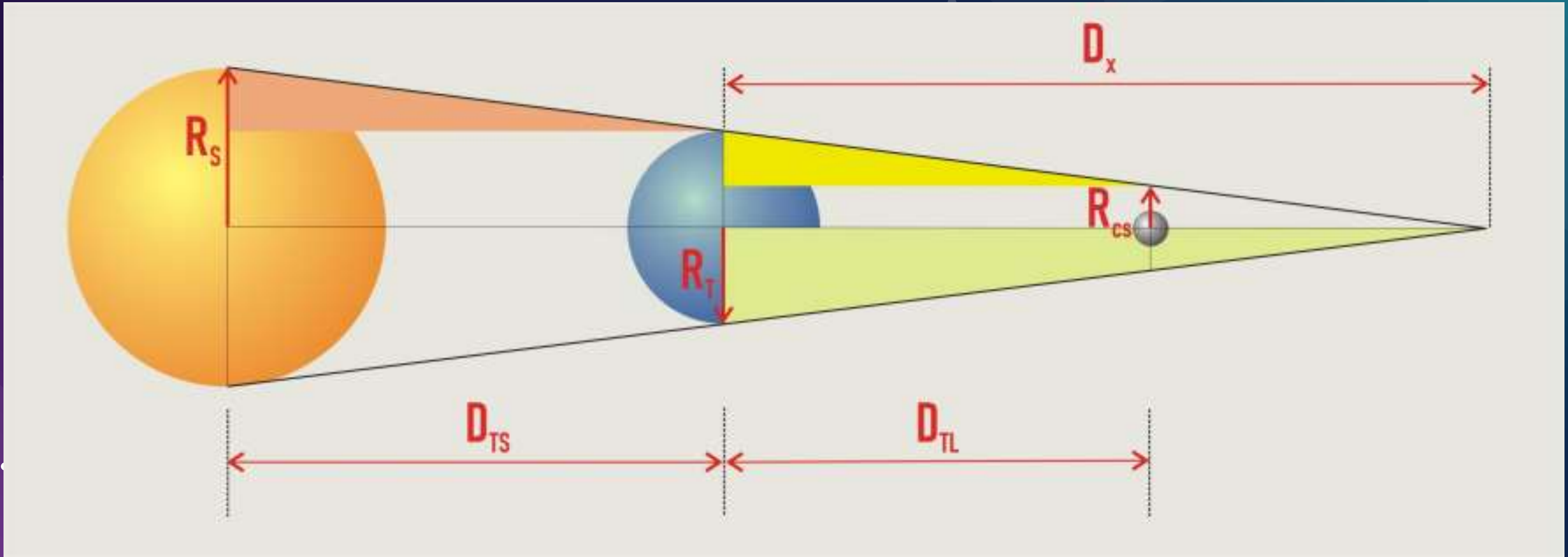
## Eclipse de Luna




¿Cuál es la relación entre los diámetros de la Luna y de la sombra de la Tierra?

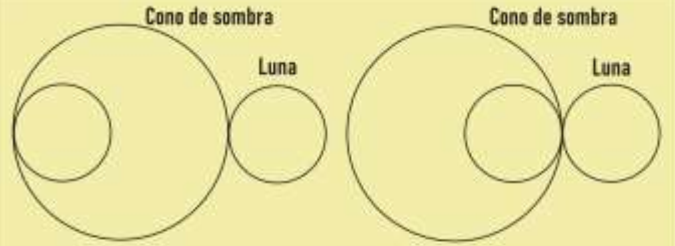
Basta dibujar las mediatrices de dos cuerdas, para determinar gráficamente los centros, de cada circunferencia

# Relaciones entre distancias y radios en el sistema STL según Aristarco

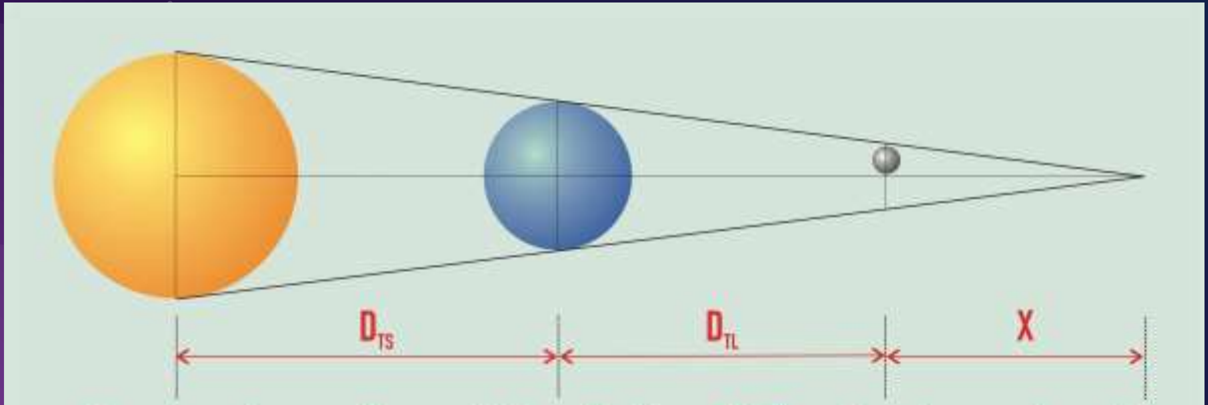


# Relaciones entre distancias y radios en el sistema STL según Aristarco

Durante un eclipse de Luna, Aristarco determino que el tiempo Necesario para que esta cruzara el cono de sombra terrestre era el Doble del necesario para que la Luna quede completamente cubierta. Dedujo entonces que: el diámetro del cono de sombra era el doble que el diámetro lunar. Hoy sabemos que es 2,6 veces.




El primer y último contacto del borde de la Luna con el cono de sombra de la Tierra, permiten medir el diámetro del cono (izquierda).El tiempo necesario para cubrir la superficie lunar sirve para medir el diámetro de la Luna (derecha)




Cono de sombra y posiciones relativas del sistema Sol Tierra Luna (no guarda escala)

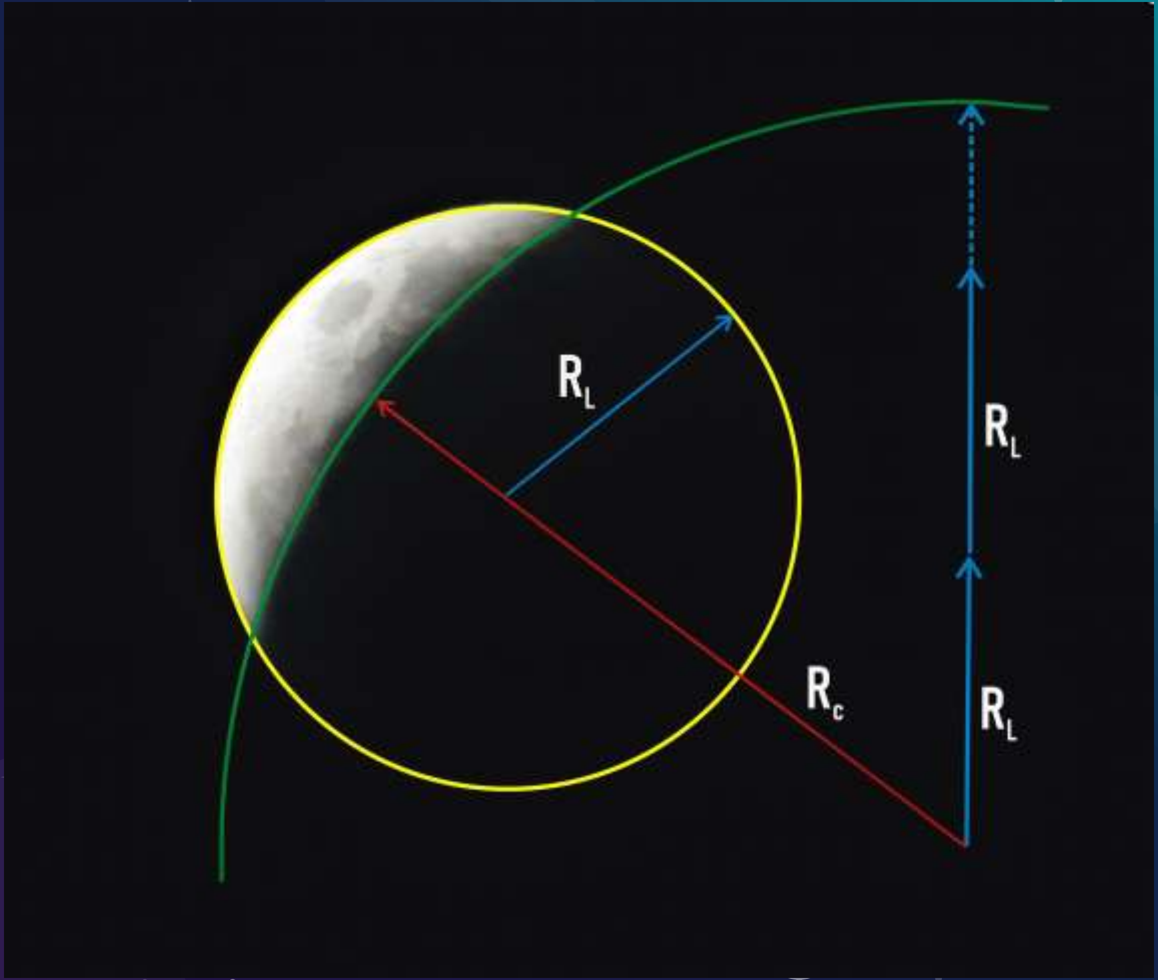
Comparar el tiempo que tarda la Luna en entrar completamente en la sombra de la Tierra desde el primer contacto (es decir, el tiempo que tarda en eclipsarse) con el empleado en recorrer el disco de sombra producido por la Tierra.

$$\frac{X}{2,6R_L} = \frac{X+D_{TL}}{R_T} = \frac{X+D_{TL}+D_{TS}}{R_S}$$

Si aproximamos $D_{TS} = 400\ D_{TL}$ y $R_S = 400\ R_L$ $\longrightarrow$

$$R_L = \frac{401}{1440} R_T$$

Imagen tomada a través de
un telescopio
eclipse lunar
Parque Cielos del Sur



# Cálculo de la fracción iluminada del disco lunar.

$\cos \Phi = \sin(\delta_{Sol}) * \sin(\delta_{Luna}) + \cos(\delta_{Sol}) * \cos(\delta_{Luna}) * \cos(\alpha_{Sol} - \alpha_{Luna})$

$\tan i = D_{TS} * \sin(\Phi) / D_{TL} - D_{TS} * \cos(\Phi)$

$k = (1 + \cos(i)) / 2$

porcentaje = parte entera redondeada de $(k * 100)$

Declinación de la Luna $\delta_{Luna}$

Declinación del Sol $\delta_{Sol}$

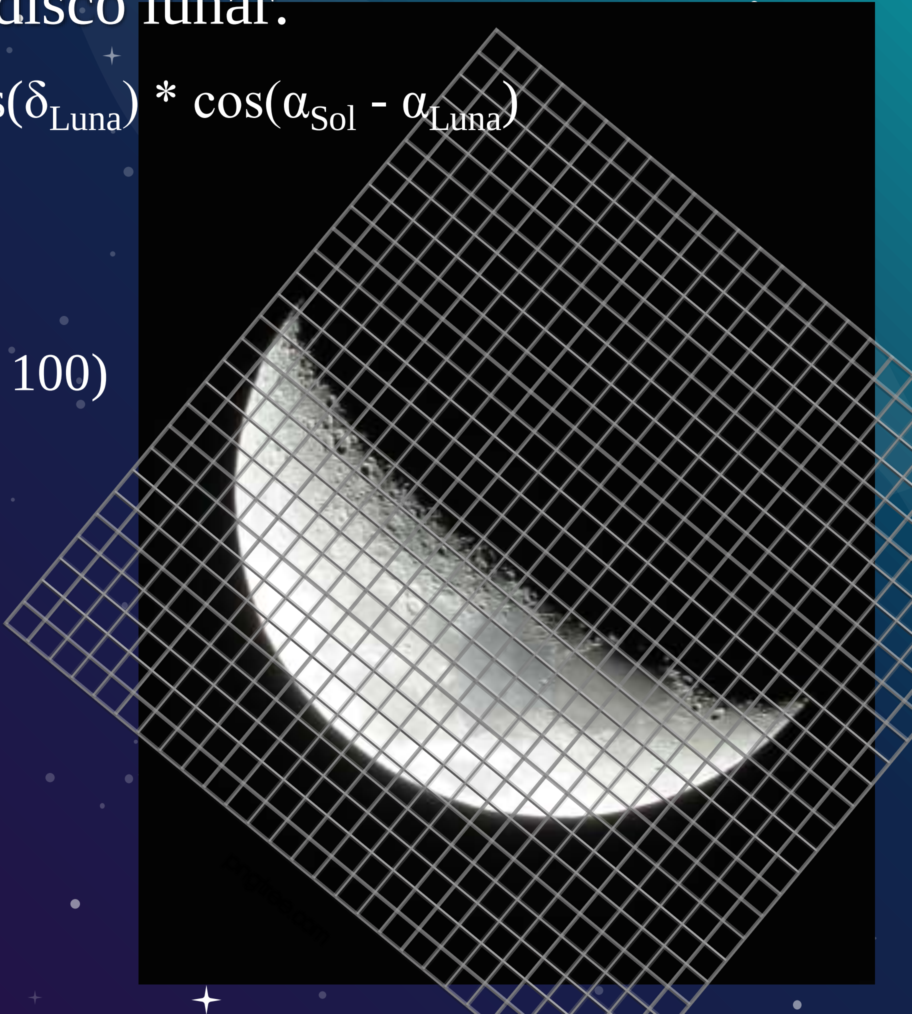
Ascensión recta del Sol $\alpha_{Sol}$

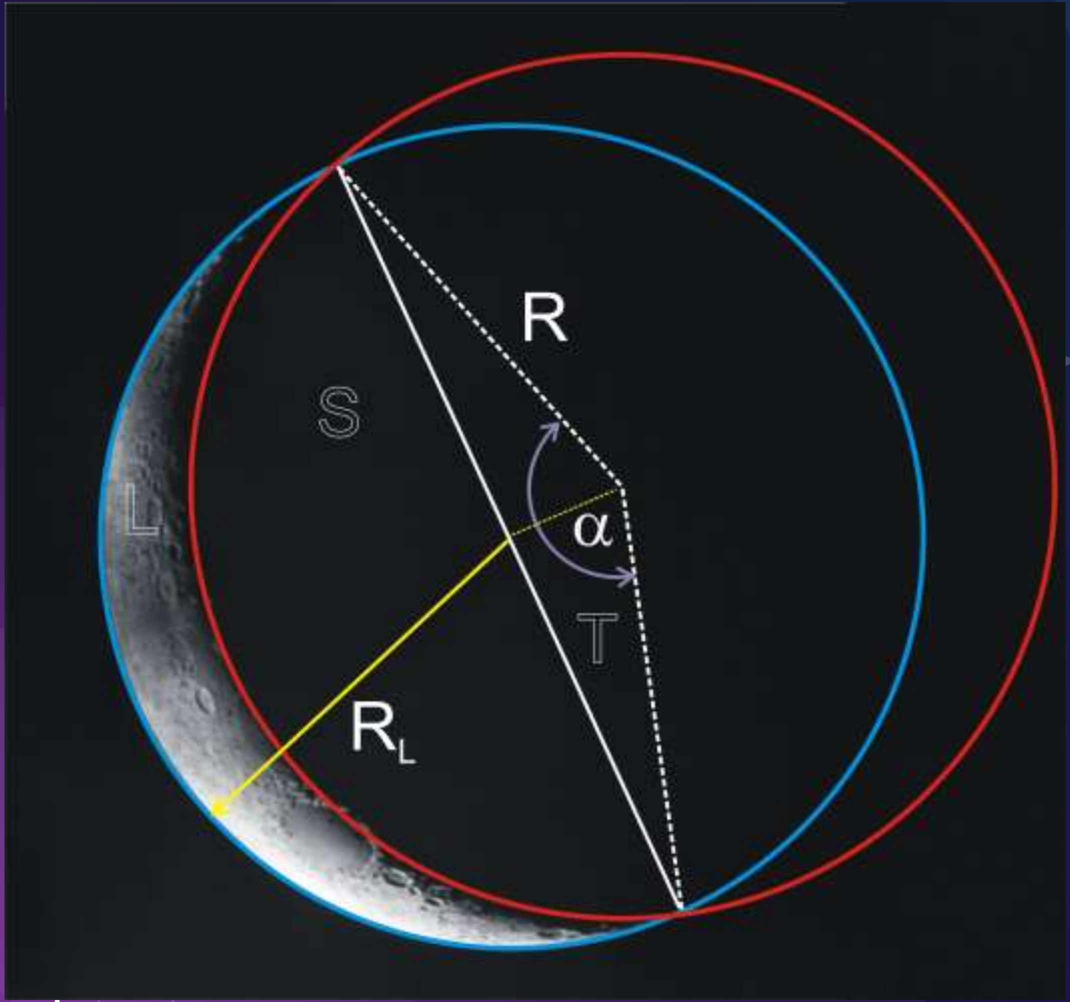
Ascensión recta de la Luna $\alpha_{Luna}$

Fracción iluminada k

Elongación geocéntrica de la Luna $\Phi$

Ángulo de fase i





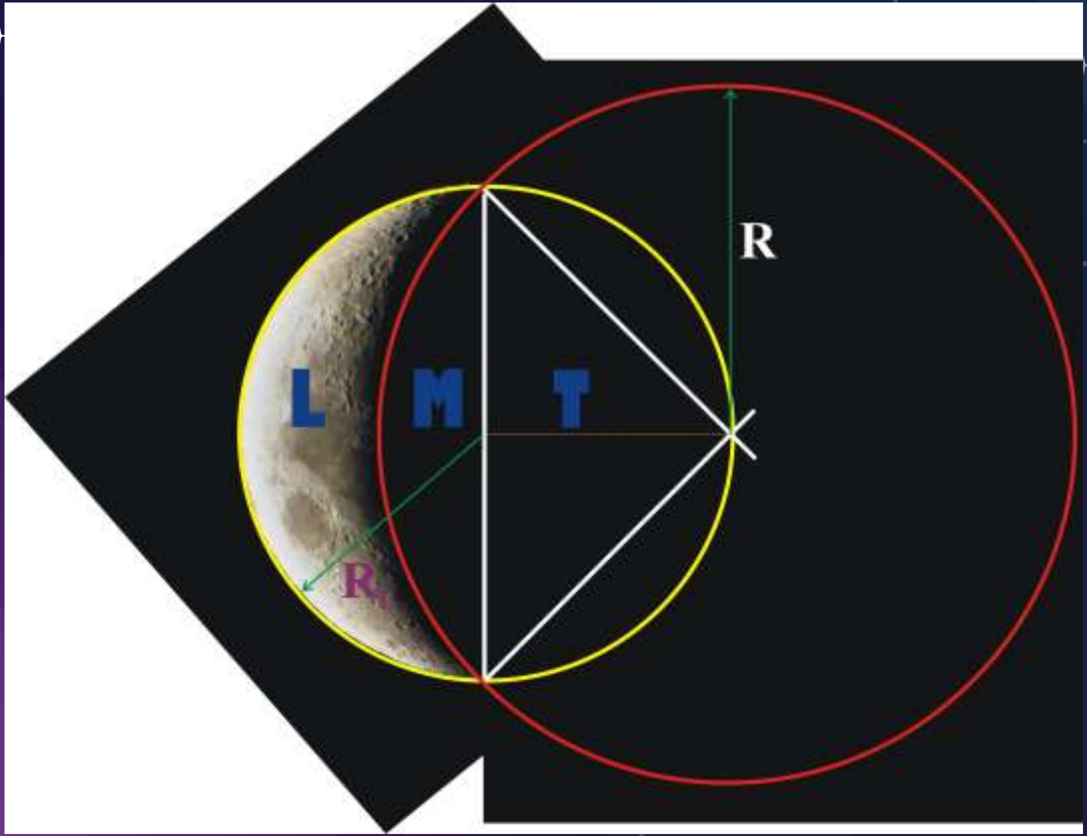

Al ser proyección de una circunferencia el terminador es una línea elíptica.

$$S = \frac{R^2.\pi.\alpha}{360} \qquad A_{SC} = \frac{R_L^{\ 2}.\pi}{2}$$

$$T = R_L.\sqrt{R^2 - \frac{R_L}{4}}$$

Lápiz, regla, compás y transportador
Hipócrates de Quíos

$$L = A - (S-T)$$




Fracción iluminada de área L

Área entre la hipotenusa y la lúnula M

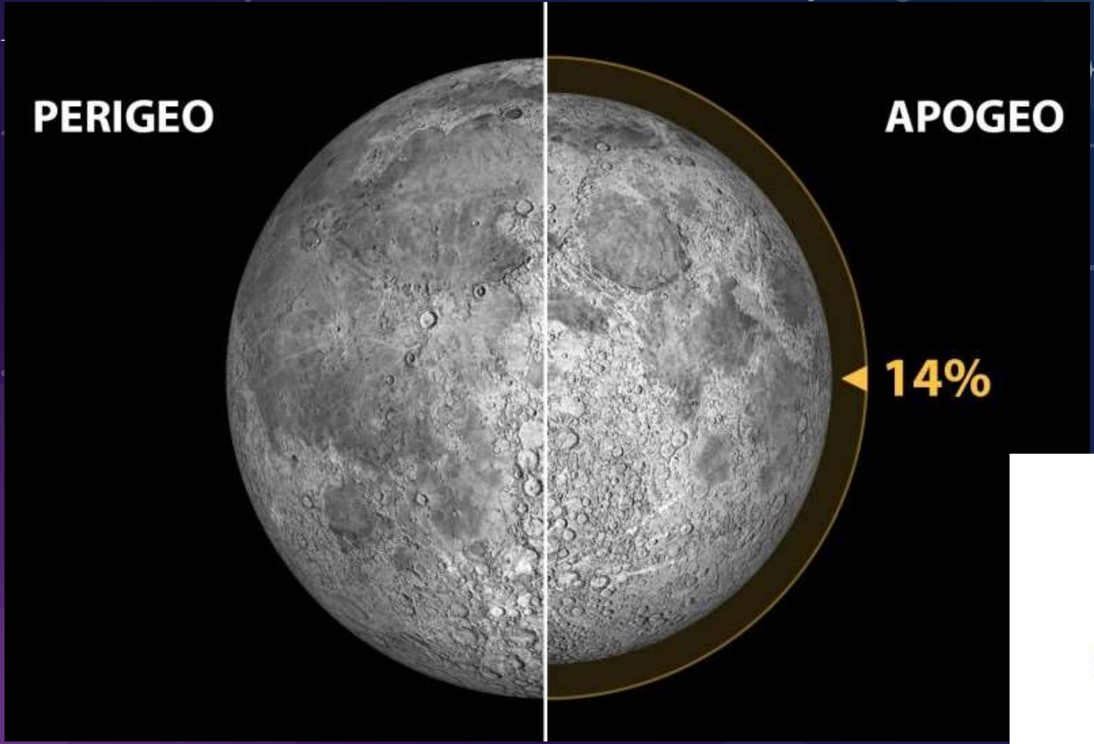
Área del triángulo rectángulo T

$$\mathbf{T} = R^2/2$$

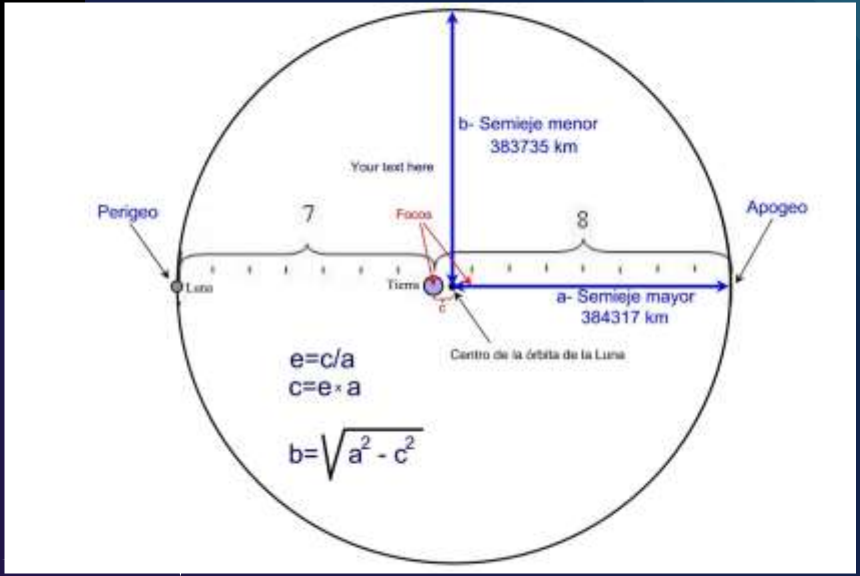
$$\mathbf{M} = \frac{\pi \,.\, R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\pi . R_L}{2} - M$$

$$\mathbf{L} = \frac{\pi . R_L}{2} - R^2 . \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)$$



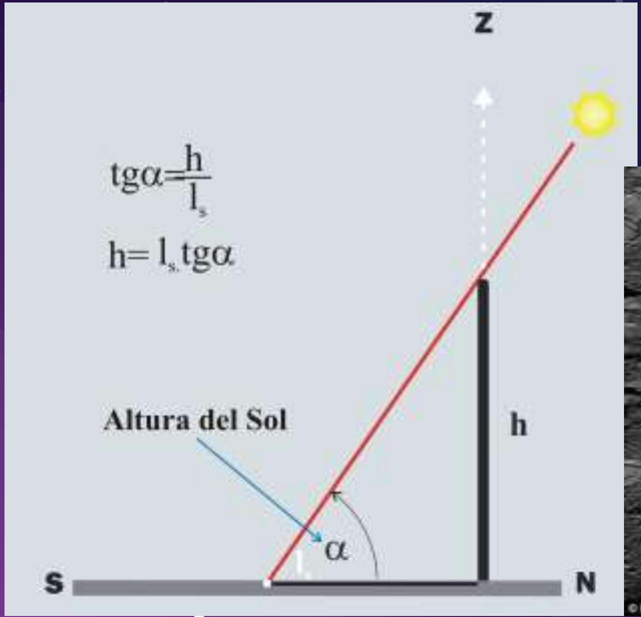

La órbita de la Luna, representada fielmente en el siguiente gráfico, es casi circular (su excentricidad e=0.055 es solo un poco mayor que la de la órbita terrestre) con los semiejes mayor y menor muy parecidos (384317 y 383735 km respectivamente).

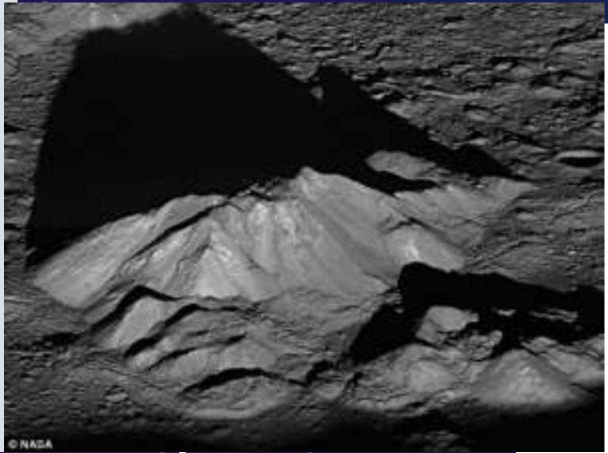


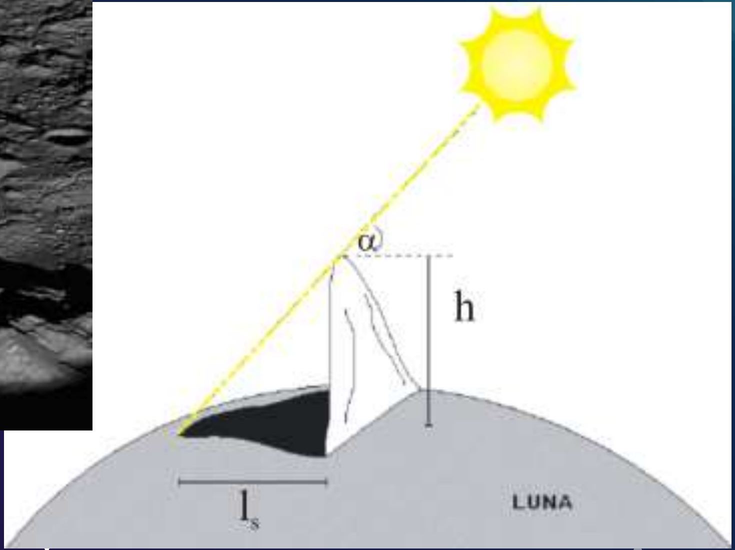
# Cálculo de las alturas del relieve lunar

Sabemos que a partir de una relación trigonométrica es posible calcular la altura de un objeto conociendo la longitud de su sombra y el ángulo que los rayos del sol forman con la horizontal en ese momento, de acuerdo al siguiente gráfico:

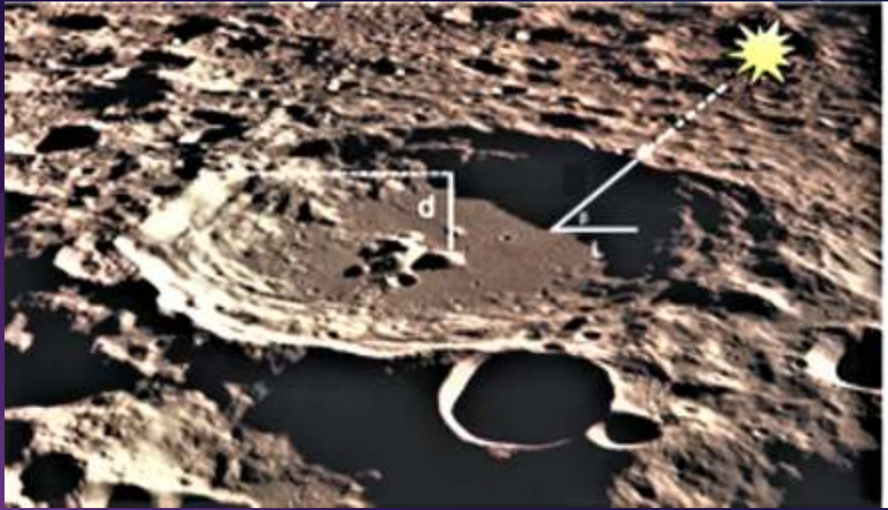
Esta relación se puede trasladar sin ningún problema a la superficie lunar si conocemos el ángulo $\alpha$ que forma el sol con la horizontal y la longitud de la sombra $l_s$.

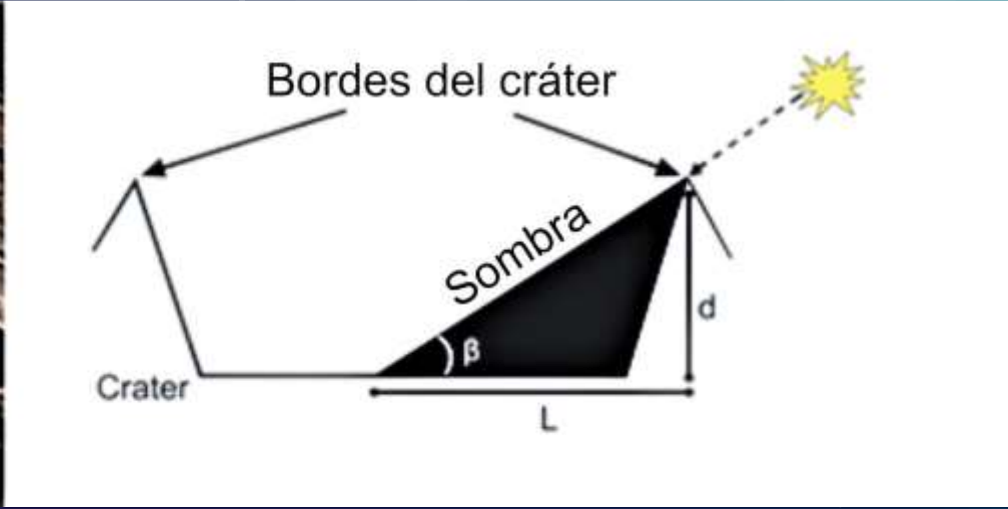


- Tenemos una fotografía del cráter Daledaus en la Luna. Para que sea más sencillo resolver el problema lo queremos pasar a una figura en el plano.

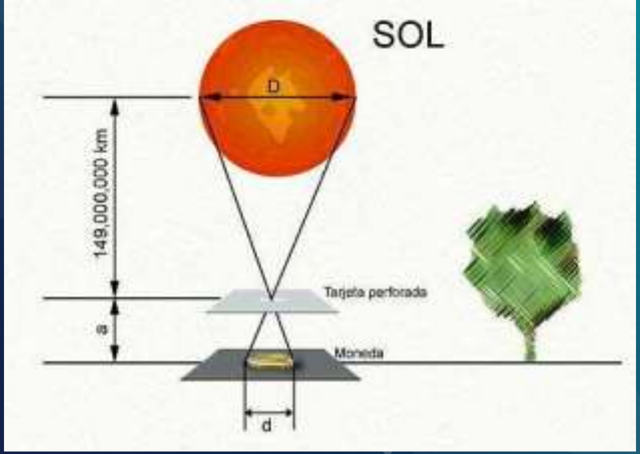



- **tg β = d/L por tanto d = L . tg β**

# Medir el diámetro del Sol

Con materiales muy sencillos y un poco de geometría (triángulos semejantes) se puede medir el diámetro del sol desde la comodidad del hogar (o de la escuela). Desde el siglo III a. C. los griegos emplearon métodos geométricos sencillos pero ingeniosos para determinar la circunferencia de la Tierra (ya todos sabían que era redonda) y la proporción entre la distancia a la luna y la distancia al sol. Esta actividad participa del mismo espíritu de sencillez y elegancia de la geometría que practicaban los griegos.




Procedimiento I

Toma la tarjeta de cartón y hazle un agujero pequeño y bien definido en el centro. La tarjeta se usará como proyector de la imagen del sol, de manera que conviene que el agujero no sea ni tan pequeño que casi no deje pasar luz, ni tan grande que la imagen del sol sea muy difusa; 2 o 3 milímetros de diámetro pueden funcionar bien.

Pon una moneda de 1 peso sobre una superficie lisa y de preferencia oscura. Subiendo y bajando la tarjeta perforada trata de ajustar la imagen del sol para que tenga el mismo diámetro que la moneda. Con la cinta métrica mide la altura a la que se encuentra la tarjeta del suelo cuando la imagen del sol y la moneda coinciden. Si la proyección del sol se hace demasiado tenue al alcanzar el tamaño de la moneda, baja la tarjeta hasta que obtengas una imagen clara y mide su diámetro sin usar la moneda. La ventaja de la moneda es que es más fácil medirle el diámetro.

Anota la altura a de la tarjeta y el diámetro d de la moneda o de la imagen del sol (medido con la regla).

En la figura aparecen dos triángulos. Ambos tienen un vértice en el agujero de la tarjeta, pero la base de uno es el diámetro del sol, D, y la base del otro, el diámetro de la moneda, d. La altura del primero es la distancia al sol (149,000,000 kilómetros) y la del segundo es simplemente la distancia entre la tarjeta y la moneda. Como son triángulos semejantes, podemos escribir:

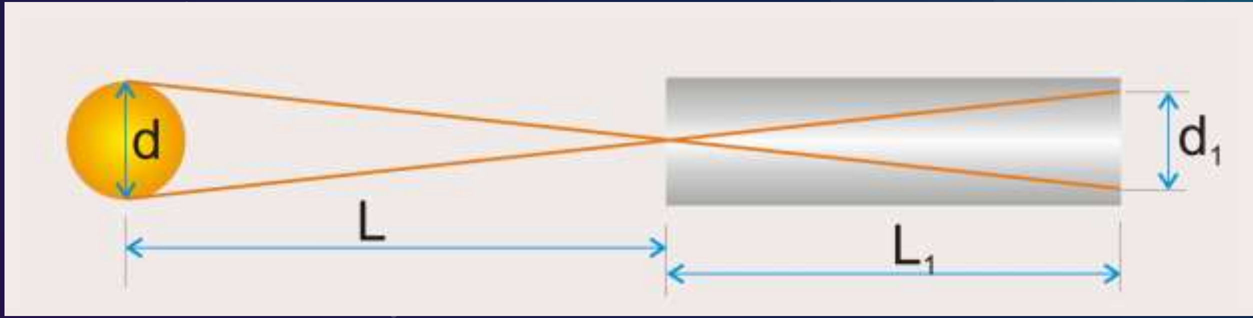
**$D/149{,}000{,}000 = d/a$ de donde: $D = (d/a) \times 149{,}000{,}000$ km**

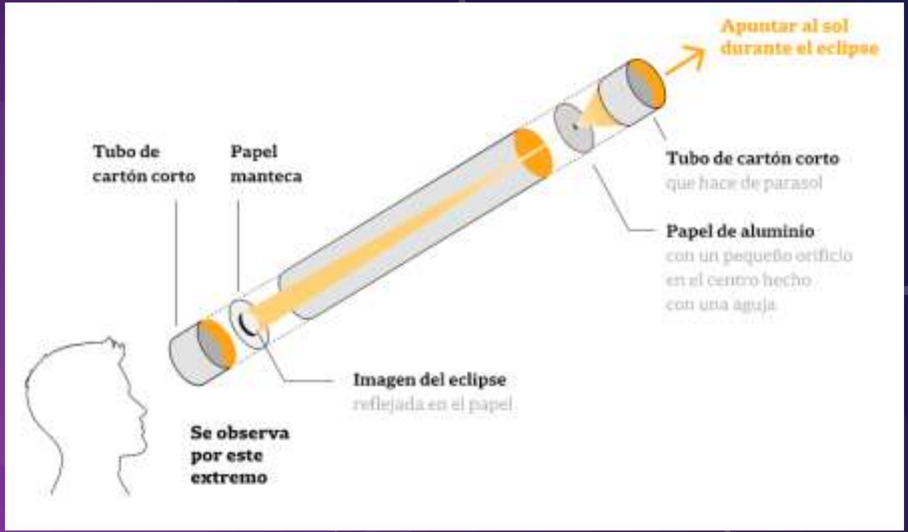
**Éste será el diámetro del sol.**

Es importante que midas el diámetro de la moneda d y la distancia entre la tarjeta y la moneda (a) en las mismas unidades, por ejemplo, en centímetros. Como la distancia al sol está en kilómetros, el diámetro del sol D también estará en kilómetros.

# Medir el diámetro del Sol
## Procedimiento II

Alhazen (965-1040) fue el inventor de la cámara oscura (estenopeica) la cual identificó los principios básicos de la fotografía moderna.




Los dos triángulos que se forman (uno de base d y altura L y el otro de base d1 y altura L1) son semejantes; por lo tanto se cumple que:

**d/L=d1/L1**

Y por lo tanto: **d=(d1*L)/L1**

el mismo experimento sirve para medir el diámetro de la luna llena.

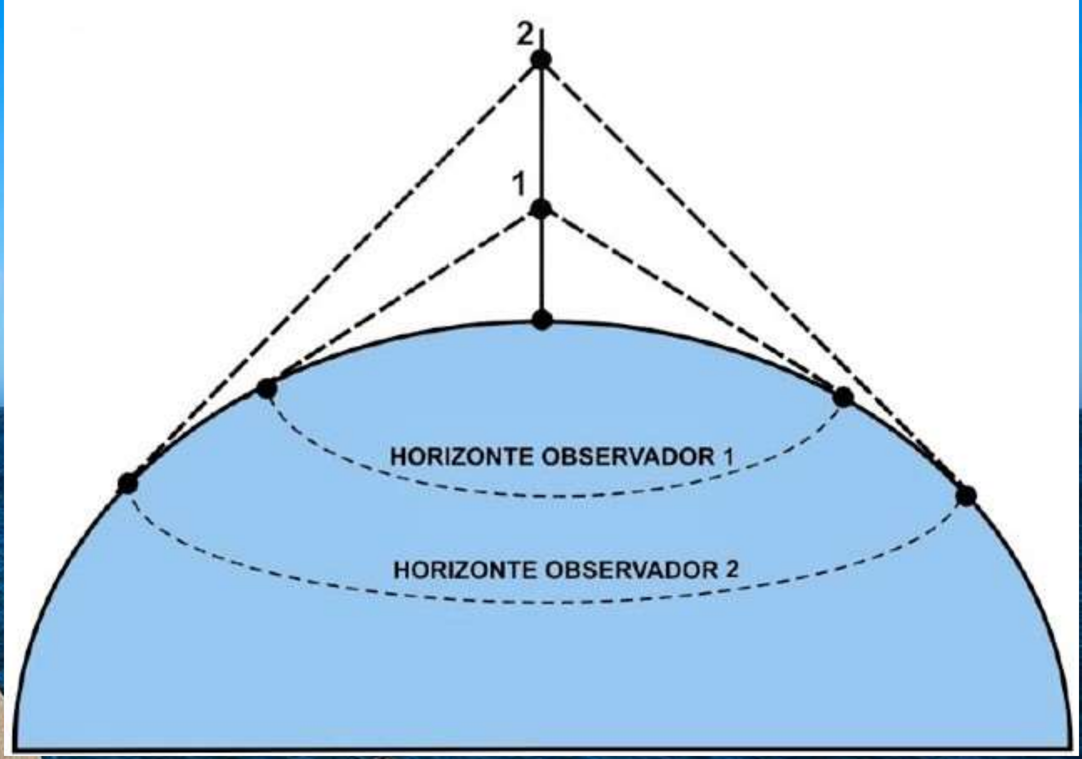
# ¿Dónde está el horizonte?

La palabra horizonte  proviene del griego "orizon": que significa limitar y refiere al **límite que separa el cielo y la tierra.** El horizonte divide a la esfera celeste en dos hemisferios: el visible, situado por encima del horizonte; y el invisible, situado por debajo.

Esto explica por qué desde cualquier punto se ven algunos astros y otros no. Si ascendemos por sobre la superficie terrestre, progresivamente aumenta el porcentaje de cielo visible. Por ejemplo desde un avión de línea (10.000 m) el horizonte se sitúa casi 3º por debajo del horizonte de quien está parado en la superficie, desde unos 600 km de altura, posición en la que orbita el Telescopio Espacial Hubble el horizonte retrocede aproximadamente 24º permitiendo ver un 63,3% de la bóveda celeste, ya que el resto quedaría temporalmente oculto por nuestro planeta

**La distancia a nuestro horizonte es la longitud del segmento que va desde nuestros ojos al punto donde nuestra visión es tangente a la superficie de la Tierra.**

Eso depende de nuestra altura, o altura de los ojos, sobre la superficie terrestre y el radio de la Tierra obviamente supuesta esférica para simplificar el cálculo.



T. de Pitágoras : $R^2+d^2=(R+h)^2 \Rightarrow \boxed{d=\sqrt{h^2+2Rh}}$

Ecuación de la recta en verde:

$$y = -tg(\varphi)\, x + (R+h)$$

(x,y) pertenece a la recta. Entonces:

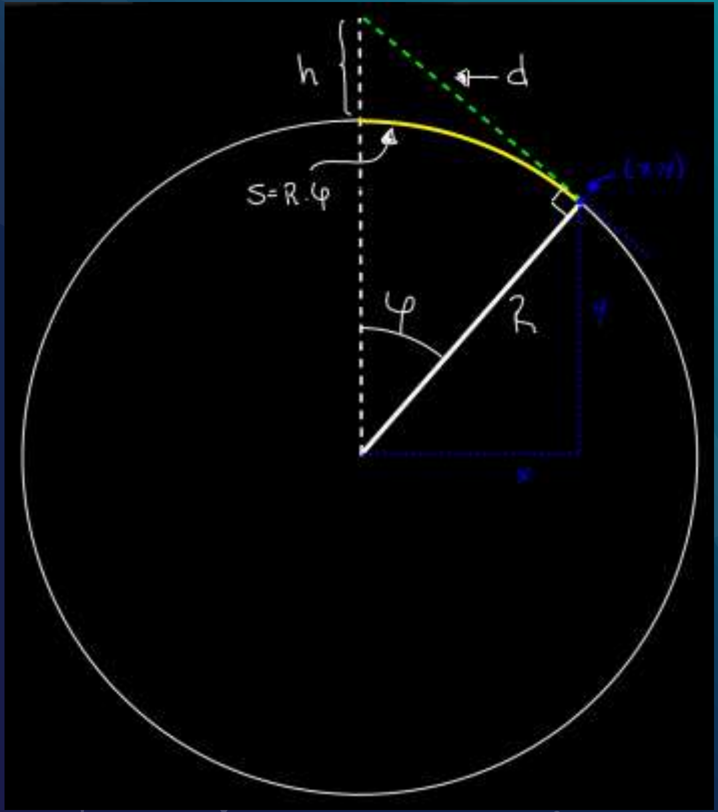
$$R\cos(\varphi) = -tg(\varphi)\, R\, sen\, \varphi + (R+h)$$

Y entonces

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+h}$$

Usando ahora que $s = R.\varphi$, llegamos a

$$\boxed{s = R.\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)}$$




Para alturas muy pequeñas $2R + h$ puede considerarse $R$ de modo que $d^2 = h.2.R$ y $d = \sqrt{2.R.h}$

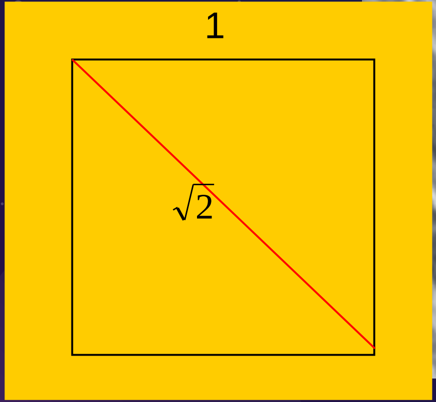
Fotografía aérea del geoglifo de la **chakana** o **Cruz del Sur** de Chao.
Se observa que el eje mayor de la Cruz está representado por el segmento entre la estrella alfa-crux y la estrella beta-crux.

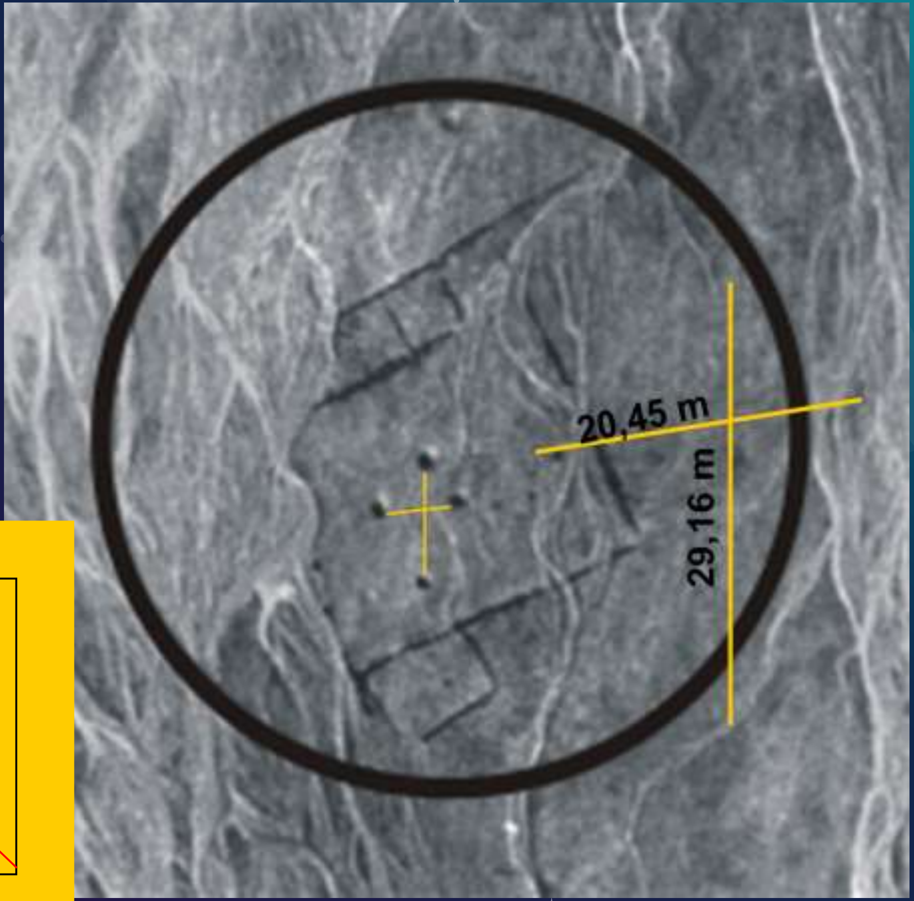
$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{bm}} = \frac{29{,}16}{20{,}45} = 1{,}426 = \ldots\sqrt{2}\,?$$

**Descubrieron su número sagrado.**

**… Y lo usaron como diagonal para construir un cuadrado de lado unitario.**

**Esta diagonal es llamada chekka en lengua aymara y chiqa en lengua quechua, palabras ambas que significan a la vez “recto’; “rectitud” y “verdad”.**

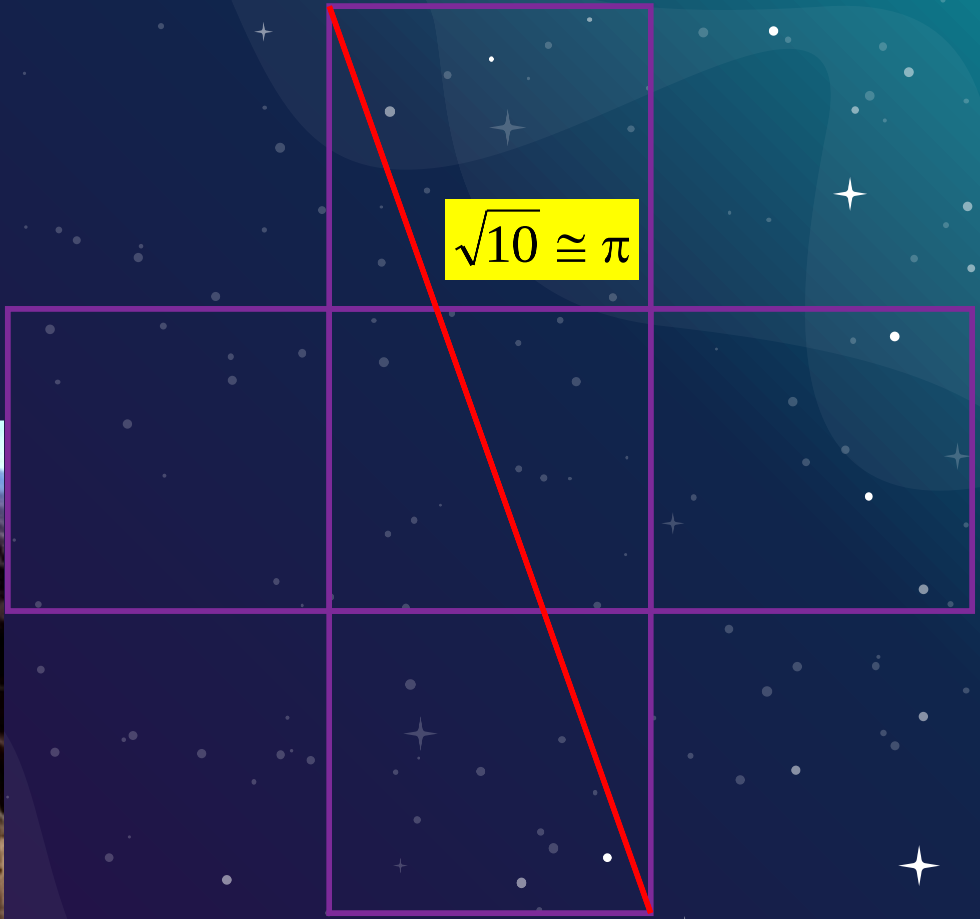


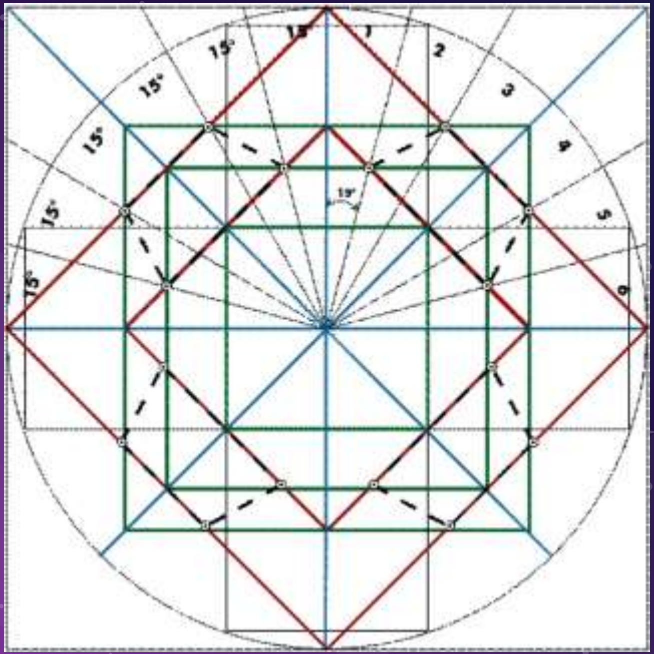
- Utilizando un simulador de cielo, por ejemplo Stellarium, es posible verificar  la relación entre el brazo mayor y el brazo menor de la Cruz


6,026/4,286 = 1,412

La diagonal mayor de la Cruz Cuadrada era la medida y la representación de la relación entre la circunferencia y su diámetro: el número $\pi$.
Para ellos, la circunferencia de diámetro unitario era igual a $\pi$.

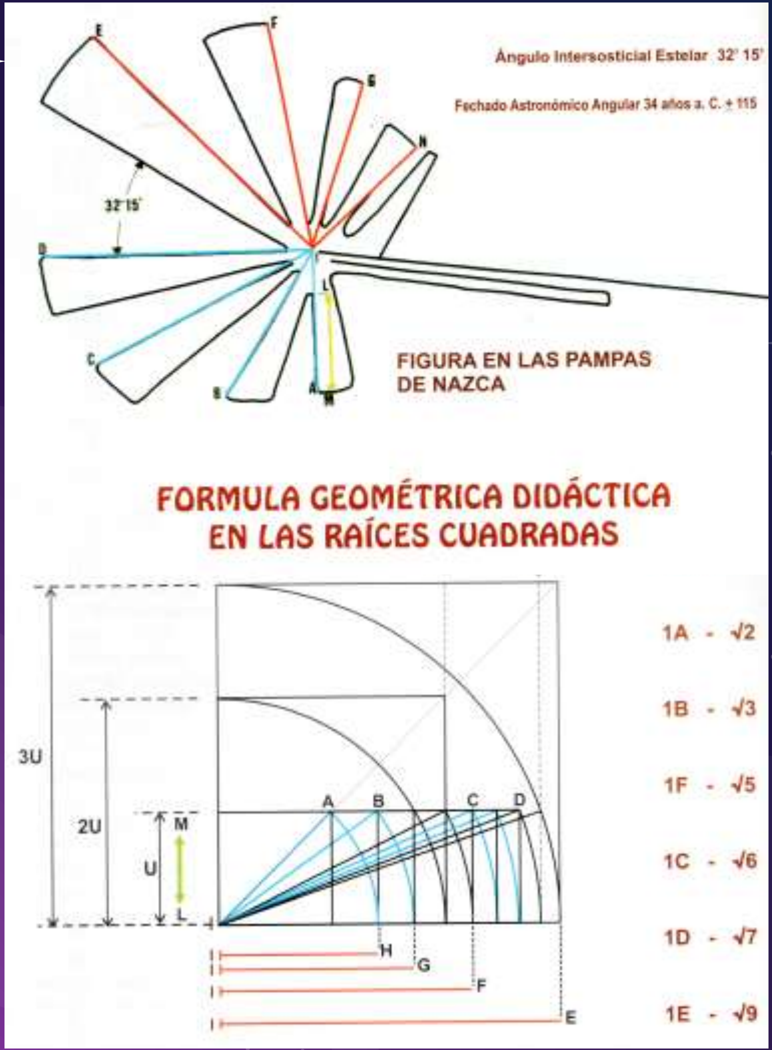


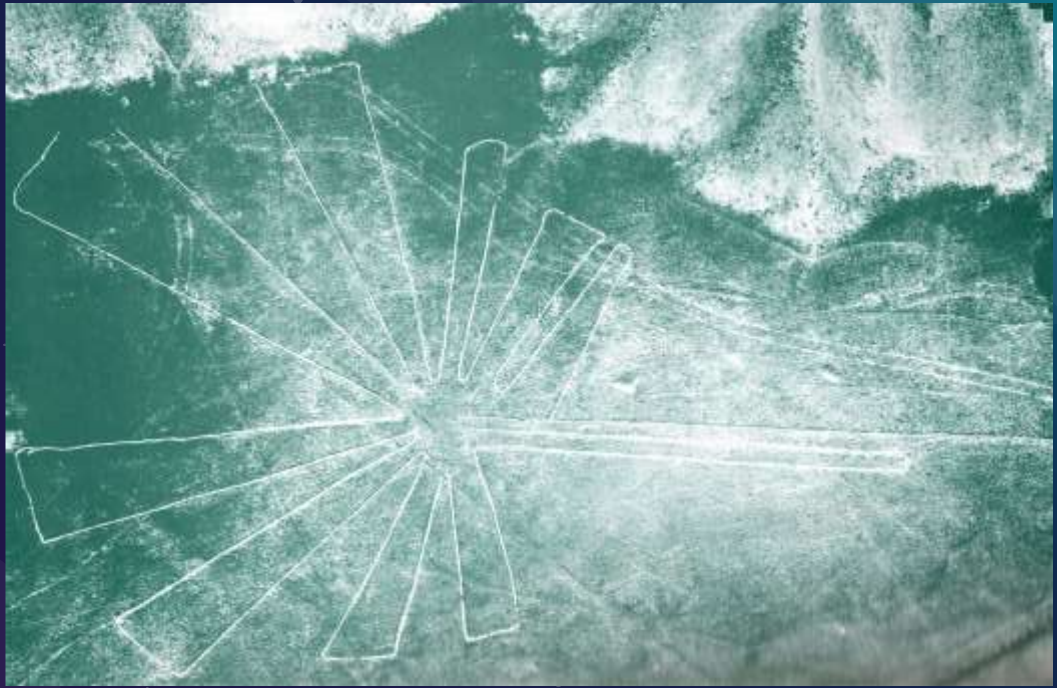
A partir del cuadrado unitario, duplicándolo geométricamente en forma sucesiva con un vértice fijo, aparece...



Cuadrados sucesivos, Chacana y división de la circunferencia en 24 partes iguales

Siguiendo el camino del rectángulo andino, se puede desarrollar la sucesión.
Las sucesivas diagonales van dando cada uno de los términos de dicha sucesión.


Ángulo Intersosticial Estelar 32° 15'
Fechado Astronómico Angular 34 años a. C. ± 115
32°15'
FIGURA EN LAS PAMPAS DE NAZCA
FORMULA GEOMÉTRICA DIDÁCTICA
EN LAS RAÍCES CUADRADAS
3U
2U
U
1A - √2
1B - √3
1F - √5
1C - √6
1D - √7
1E - √9



# Final de la primera parte
# Gracias por estar!!

Armando Eugenio Zandanel