

# Matemática desde la Astronomía



# Astronomía con un palo

**El nuestro es un mundo periódico.**

**Es decir, vivimos inmersos en una alternancia entre noches y días que condiciona nuestro comportamiento, nuestro trabajo, todas nuestras actividades.**

**Resulta extremadamente conveniente conocer en qué momento del día nos encontramos si queremos organizar nuestra vida tanto personal como social. Sin embargo, esta necesidad no es nueva en absoluto.**

**La medida del tiempo ha sido algo que ha preocupado a todas las sociedades desde la más remota Antigüedad.**

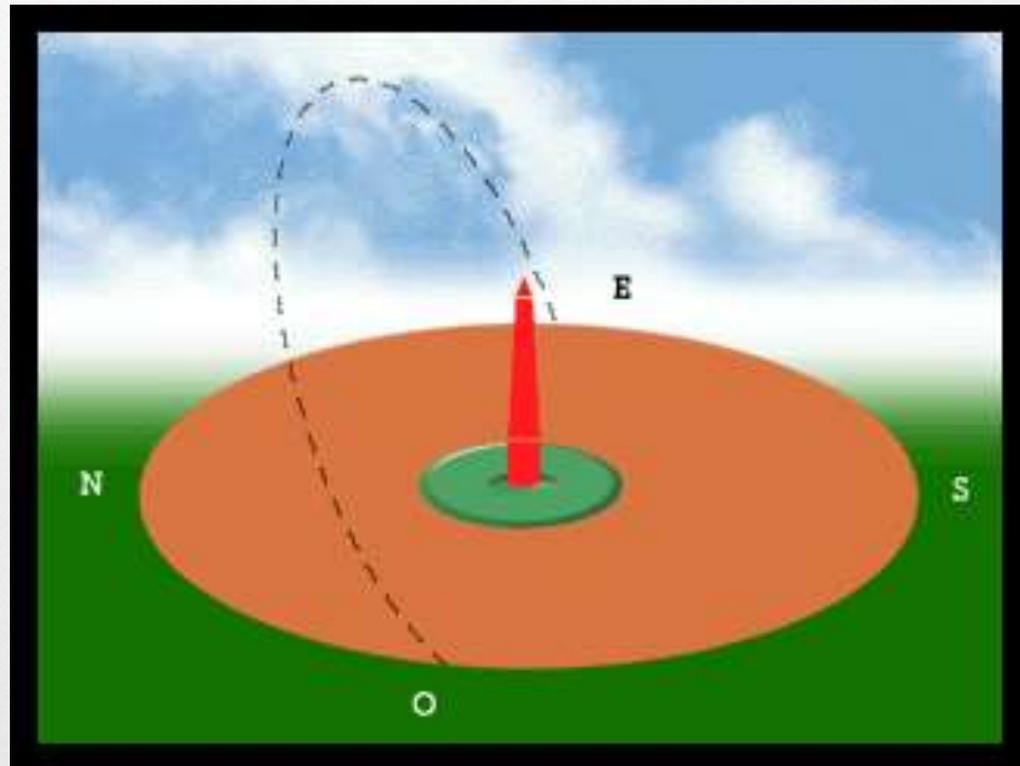
**Observar y medir la sombra de un objeto vertical, nos permite abordar distintos temas de astronomía básica, de modo que trataremos de cazar sombras...**

**Cuando un objeto opaco intercepta la luz procedente del Sol o de otra fuente de luz, llamamos sombra a la zona menos iluminada resultante de esta intercepción**

---



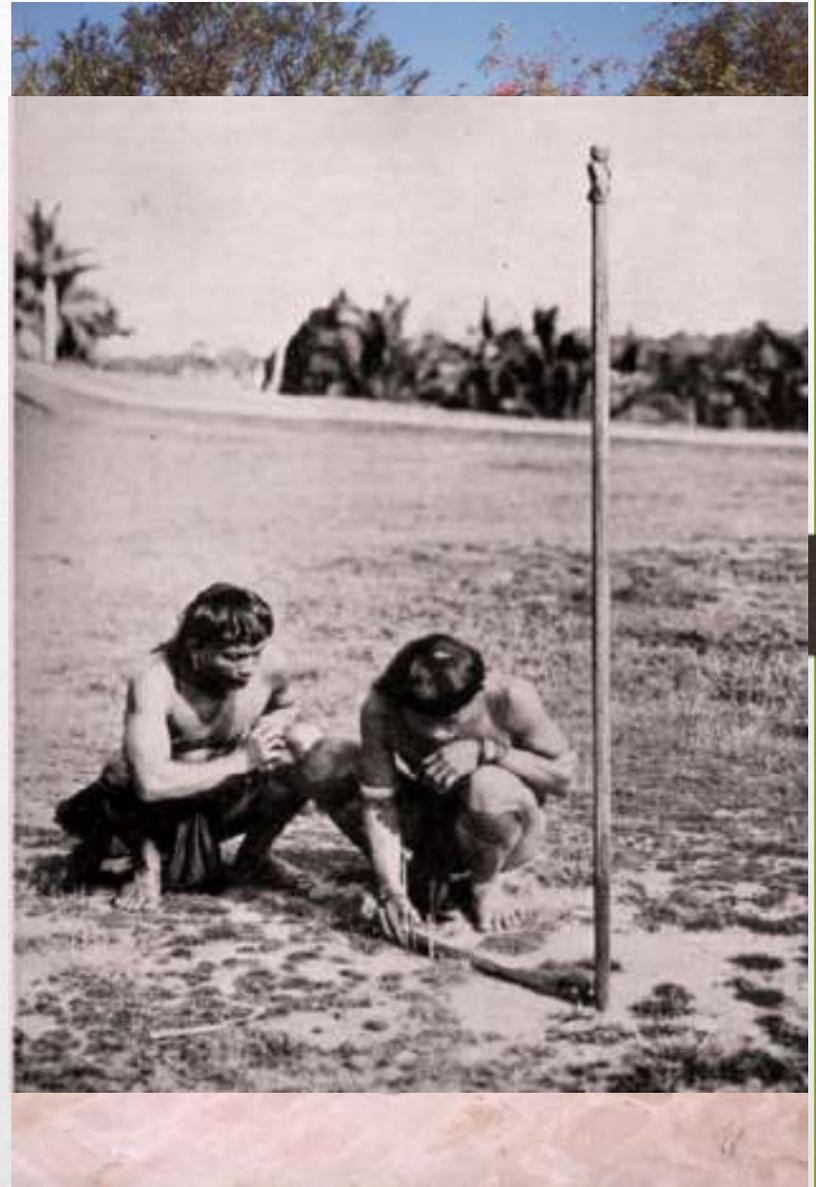
**Las sombras se mueven de Oeste a Este como rota nuestro planeta**



# *Gnomón*

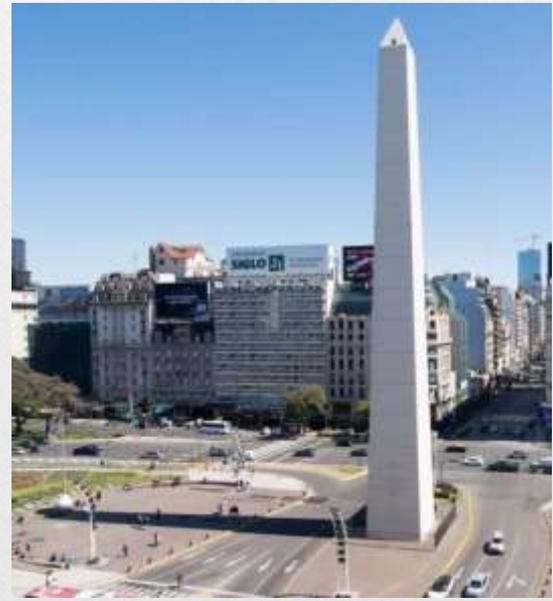
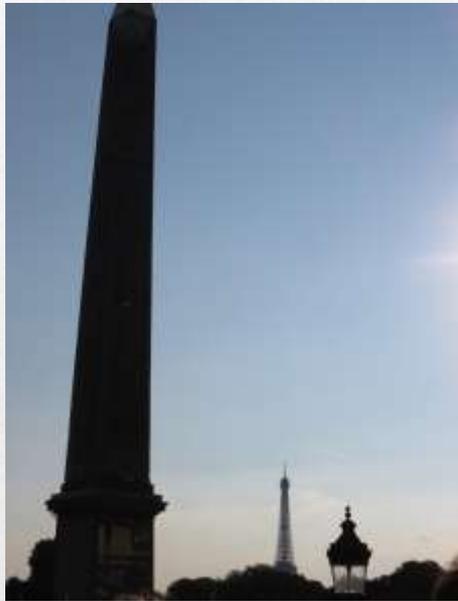
**Varilla clavada  
verticalmente en el  
suelo  
que arroja sobre éste  
una  
línea de sombra al  
darle el Sol**

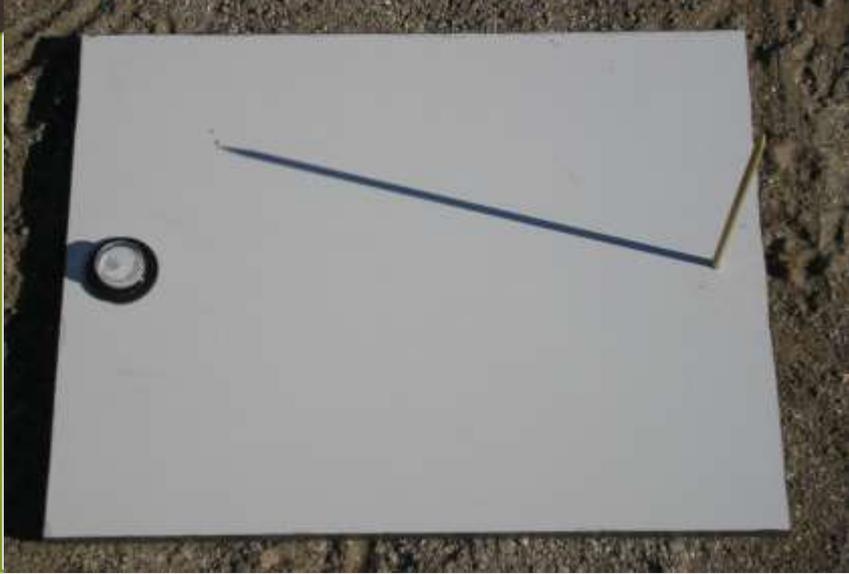
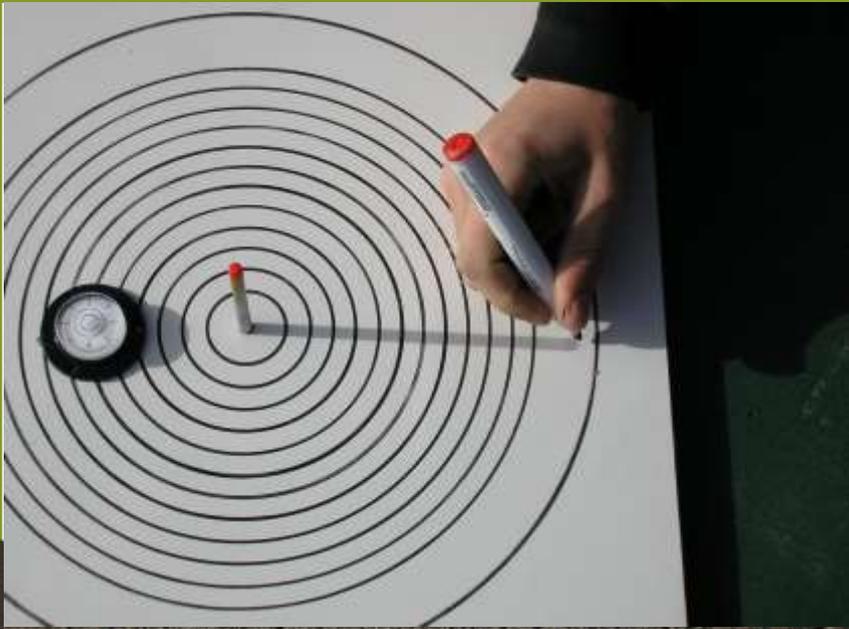
**Dies fugit sicut umbra**



# Gnomones

---





## Máxima altura o “Culminación Superior”



Punto de puesta  
*Occidente*

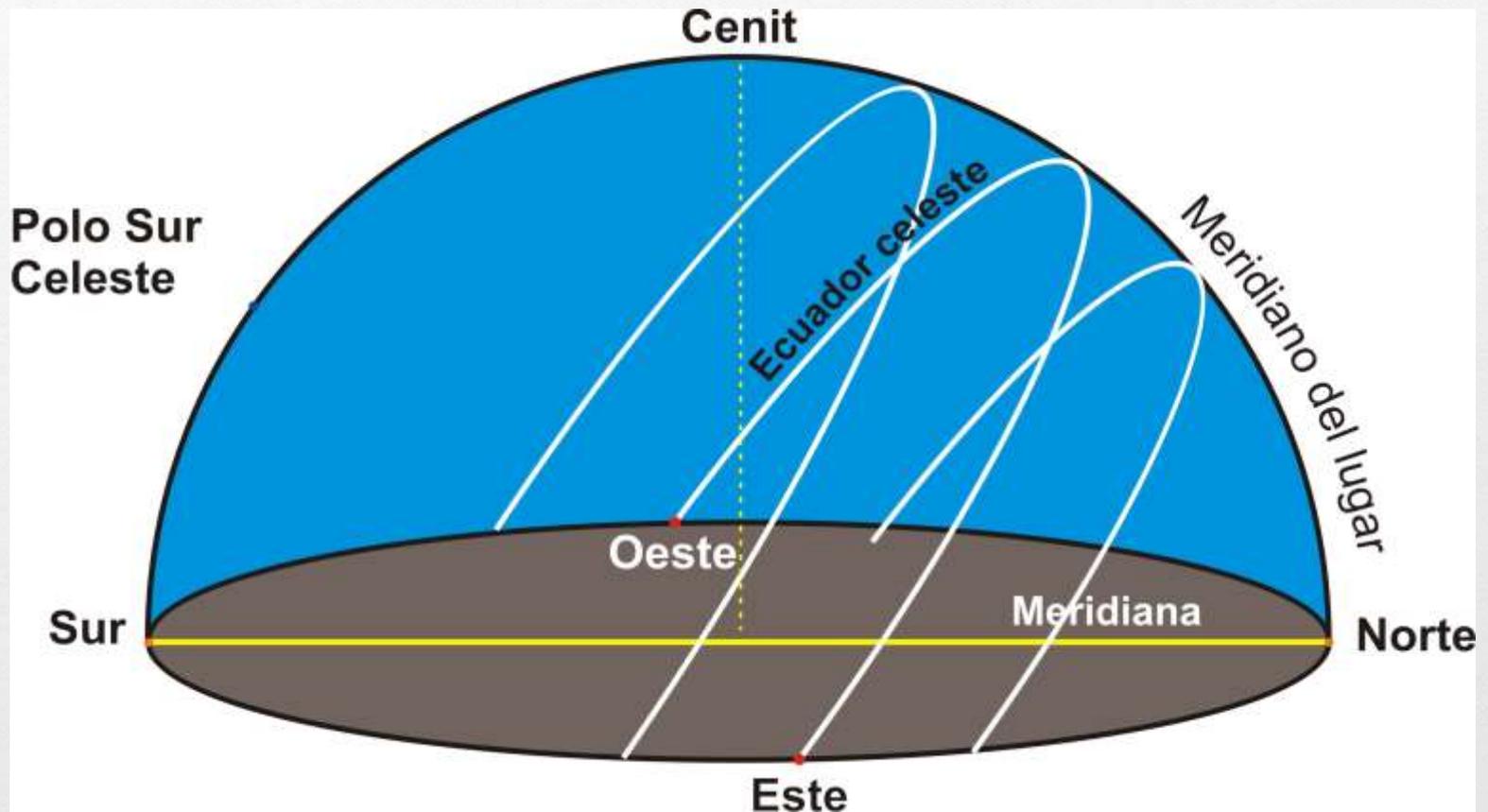
Meridiano del observador

punto de salida  
*Oriente*

### Puntos importantes en el recorrido de los astros.

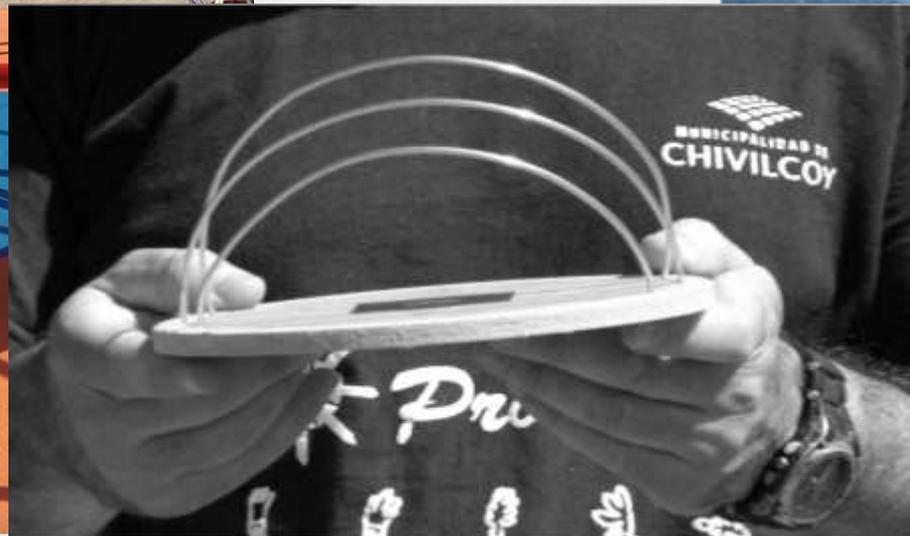
La altura crece en Oriente y decrece en Occidente; el máximo valor ocurre cuando el astro cruza el **meridiano del observador**, lo que no se produce necesariamente en el **Cenit (Z)**. Para el Sol, dicho paso meridiano indica el “**mediodía astronómico**”.

# Arco diurno

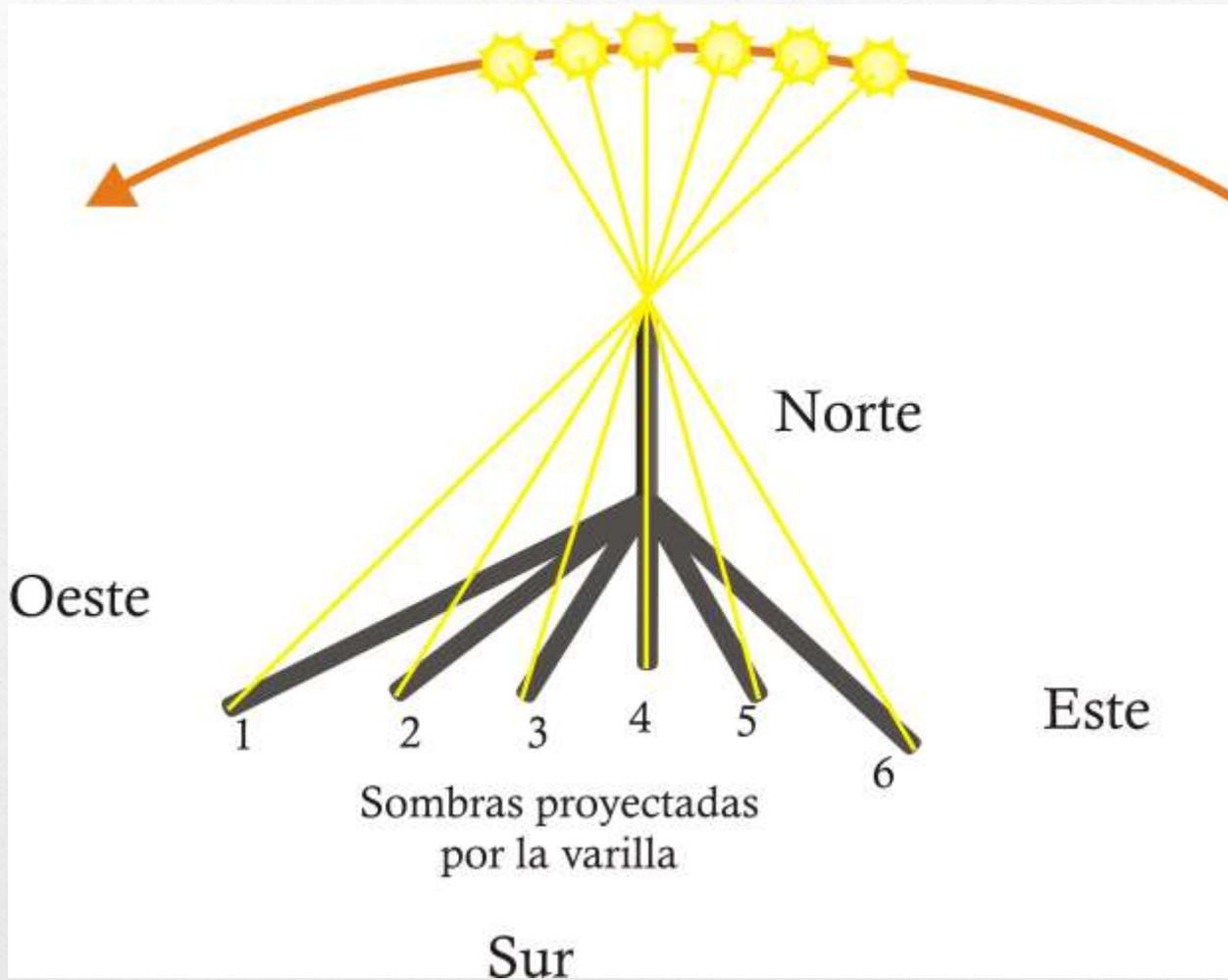




## Arcos para días especiales

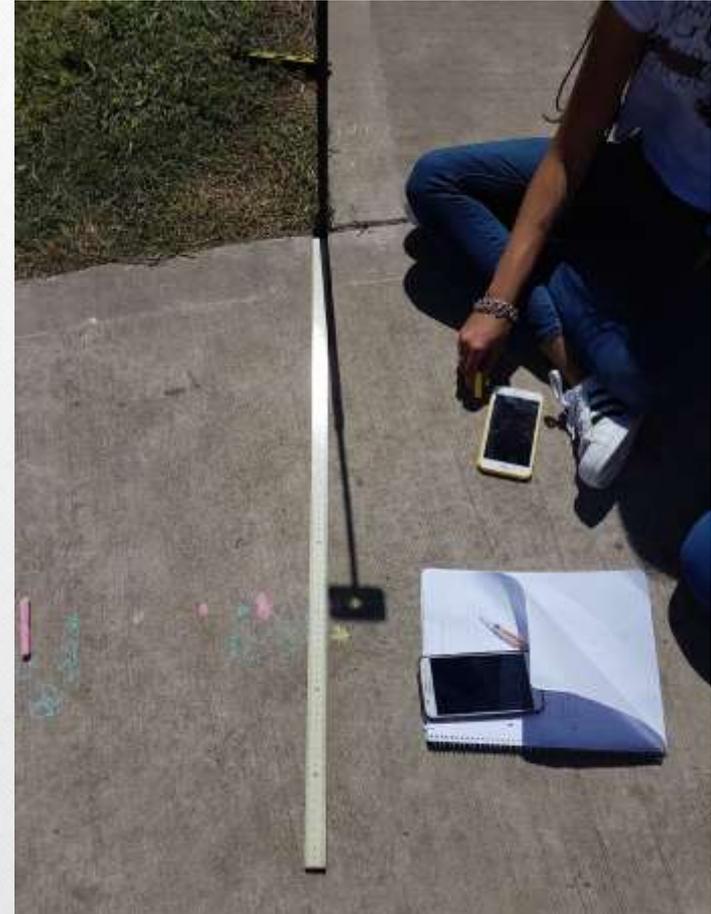


# Movimiento de las sombras



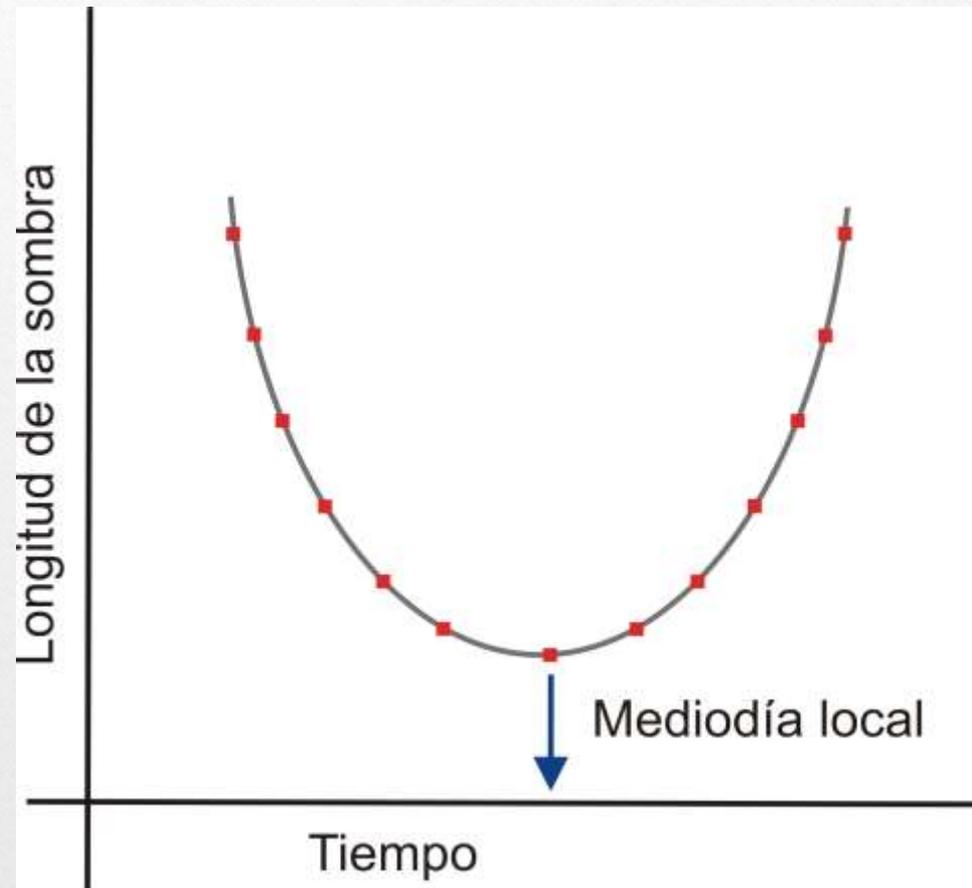
Consiste en marcar con algún elemento donde cae la punta de la sombra. Si esperamos una veintena de minutos antes de señalar la segunda marca, como la Tierra gira alrededor de  $1^\circ$  cada 4 minutos, esto originará un ángulo de  $5^\circ$  entre las direcciones de las sombras. Un grupo de marcas así determinada permite confirmar que las sombras se desplazan de Oeste a Este del mismo modo que gira la Tierra. Si unimos dos marcas, La primera siempre estará al oeste de la segunda, a cualquier hora del día y en cualquier parte de la Tierra.

## Variación de las sombras



Midiendo durante un día la longitud de la sombra a intervalos regulares, puedo confeccionar una tabla y luego graficar las longitudes de las sombras en función del tiempo

## Longitud de la sombra



El mediodía verdadero sigue señalando el paso del Sol por el meridiano de lugar. Si marcamos un día cualquiera la sombra de menor longitud que proyecta el palo vertical (gnomón) instalado en un patio soleado, y medimos el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la sombra sea mínima el día siguiente, habremos obtenido la duración del día solar verdadero.

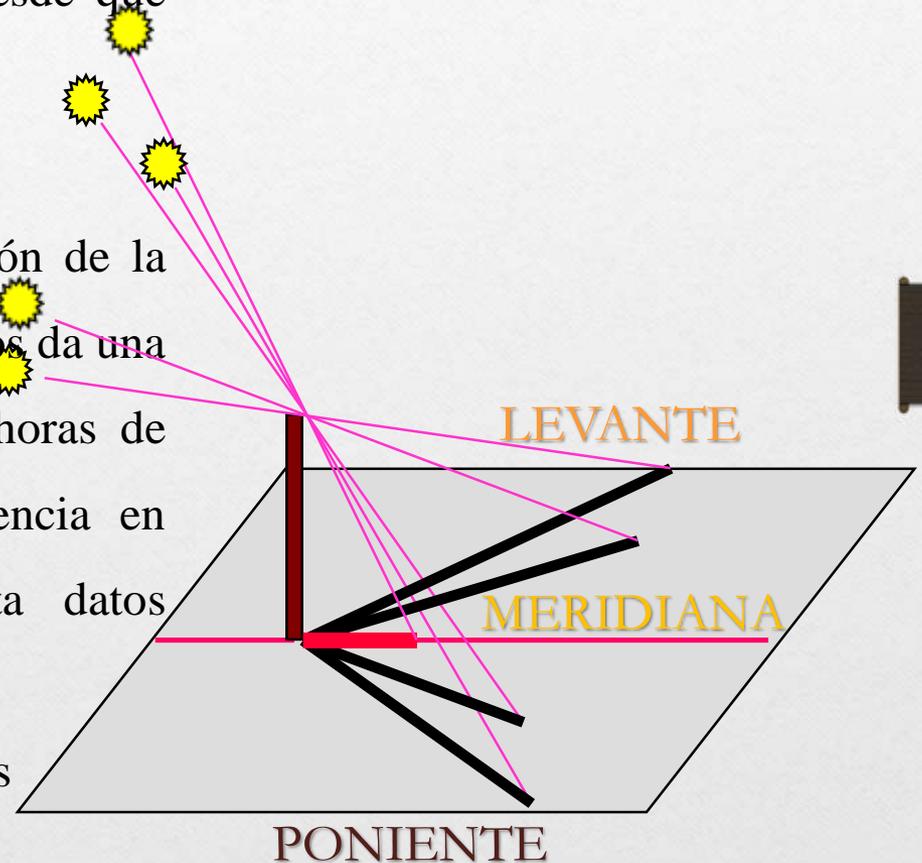
## Duración del día



Algunos días del año permanecen soleados o con poca nubosidad, en tal caso, podemos realizar un conjunto de medidas desde que amanece hasta que anochece.

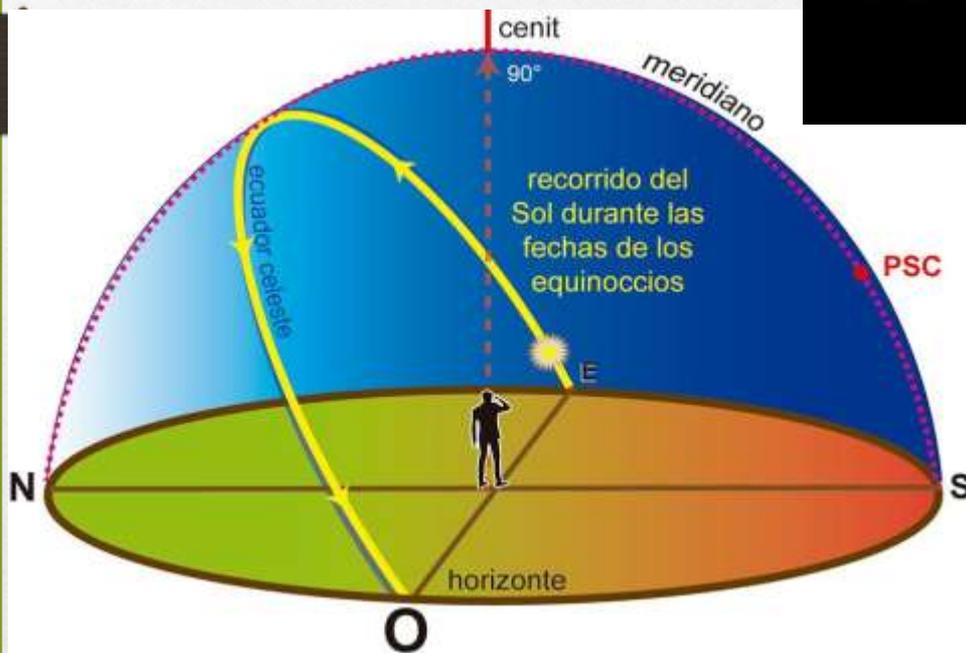
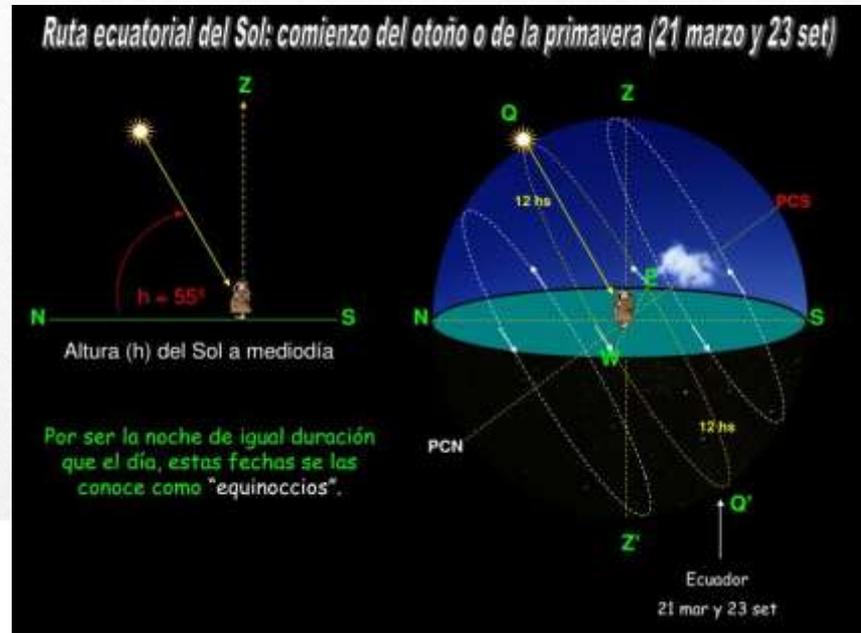
El ángulo formado por la dirección de la primera sombra y la dirección de la última con vértice en el gnomón, nos da una idea de la duración del día luz (horas de Sol). La repetición de la experiencia en distintas épocas del año reporta datos experimentales que reafirman los cambios de duración de los períodos de luz y sombra.

## Duración del día luz



# Duración del día luz

Conociendo la declinación y la latitud es fácil determinar la duración del día



Mediante la formula:

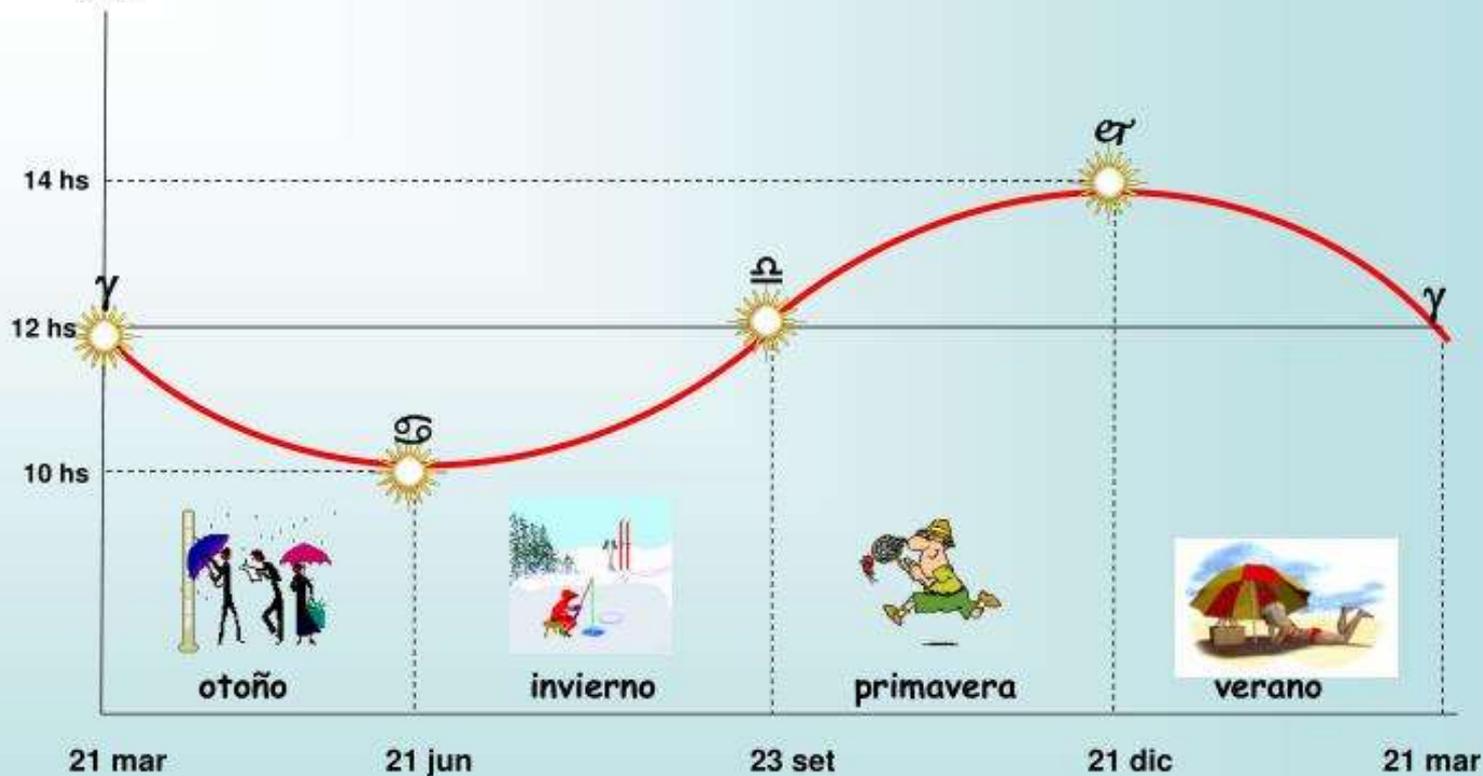
$$\cos w \equiv - \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$T_d = 2 \operatorname{arc} \cos (- \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta)$$

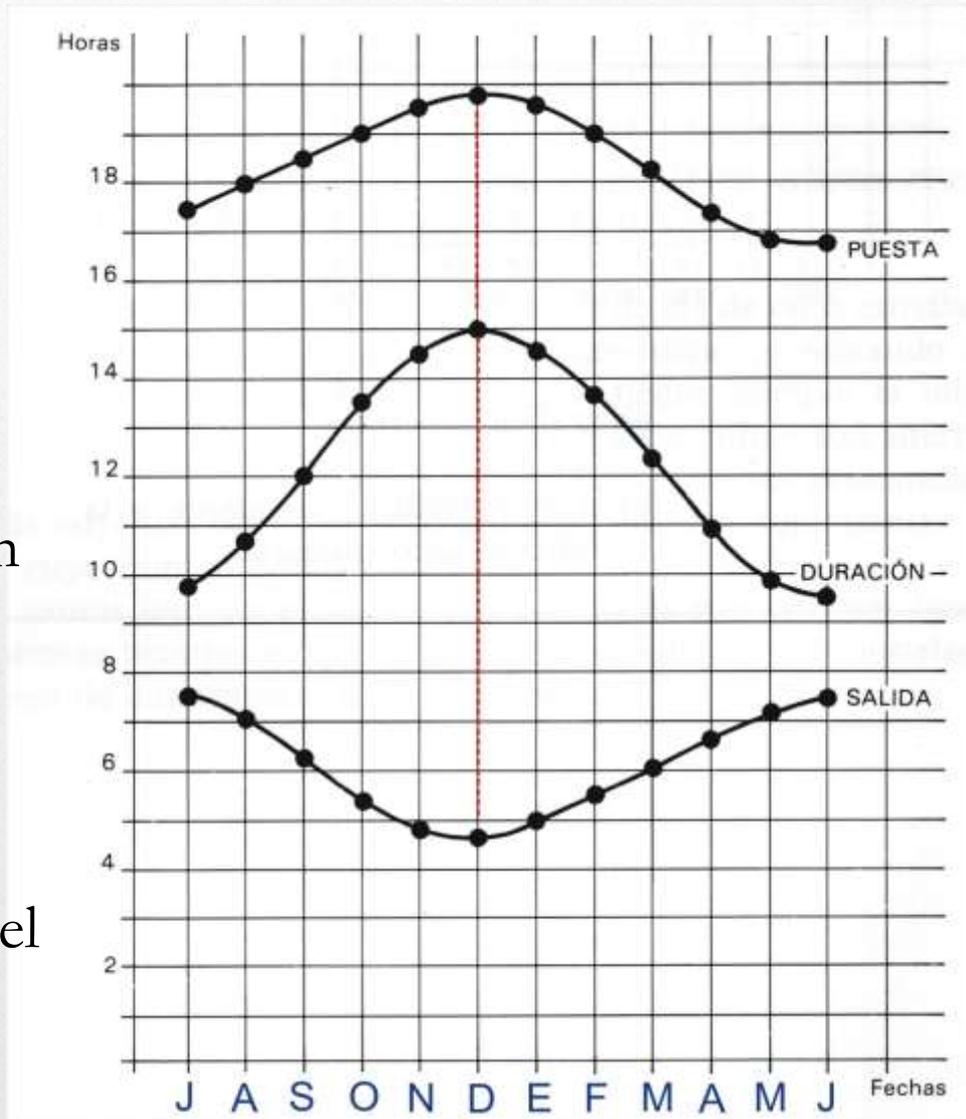
<b>Día del año (Chivilcoy)</b>	<b>Hora de salida del sol</b>	<b>Hora de puesta del sol</b>	<b>Duración del día</b>
21 de enero	6:08	20:12	
21 de febrero	6:39	19:45	
<b>20 de marzo</b>	7:04	19:11	
21 de abril	7:29	18:22	
21 de mayo	7:52	18:01	
<b>20 de junio</b>	8:08	17:56	
21 de julio	8:02	18:11	
21 de agosto	7:34	18:33	
<b>22 de septiembre</b>	6:48	18:57	
21 de octubre	6:10	19:19	
21 de noviembre	5:43	19:49	
<b>22 de diciembre</b>	5:43	20:14	

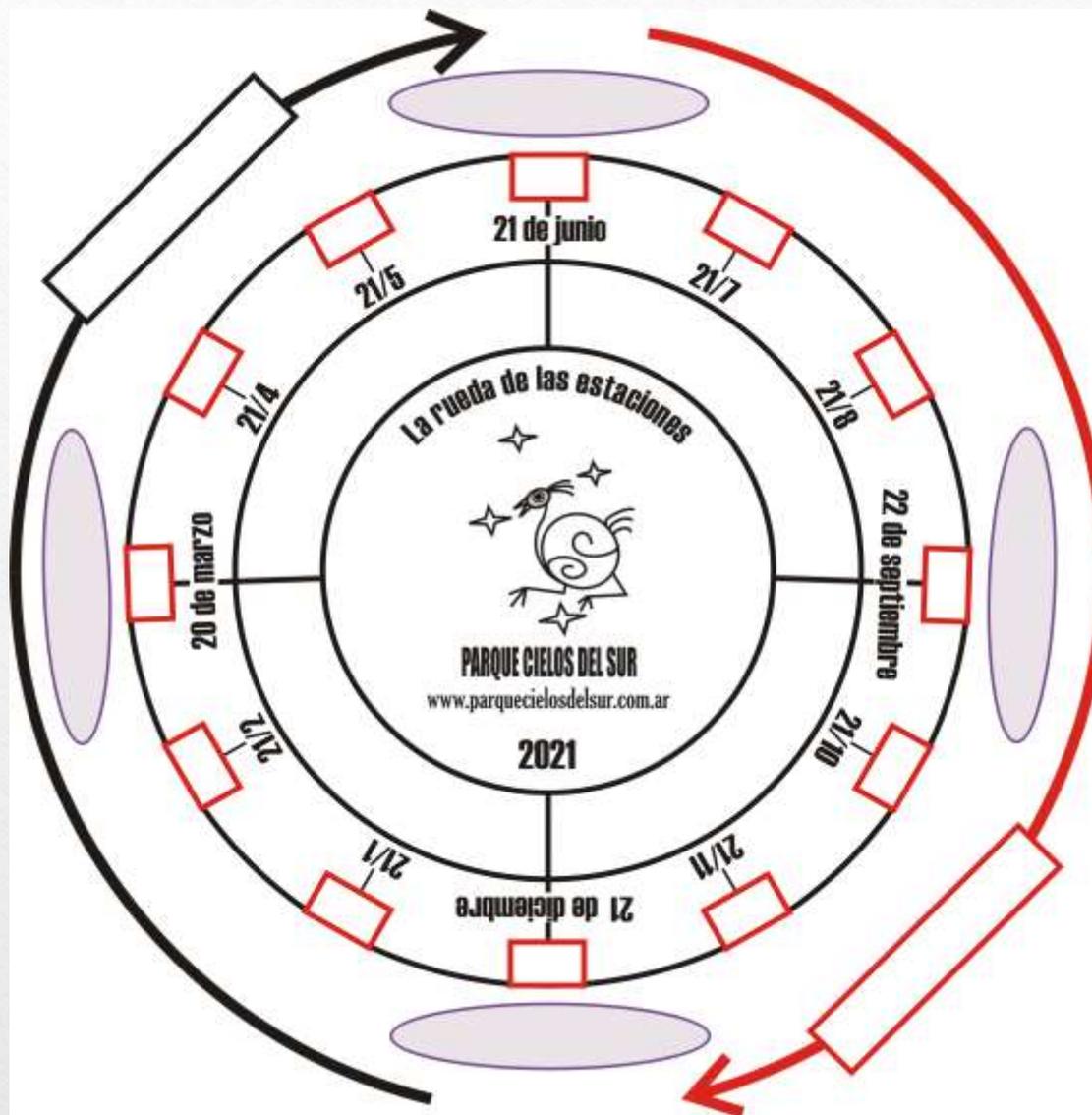
# Gráfica de duración de los días

Duración días



En una misma hoja de papel cuadriculado o milimetrado, se pueden dibujar dos funciones *Salida y puesta de Sol*. Al completar la tabla con la duración el día se puede representar gráficamente la función *duración del día* en la misma hoja de papel





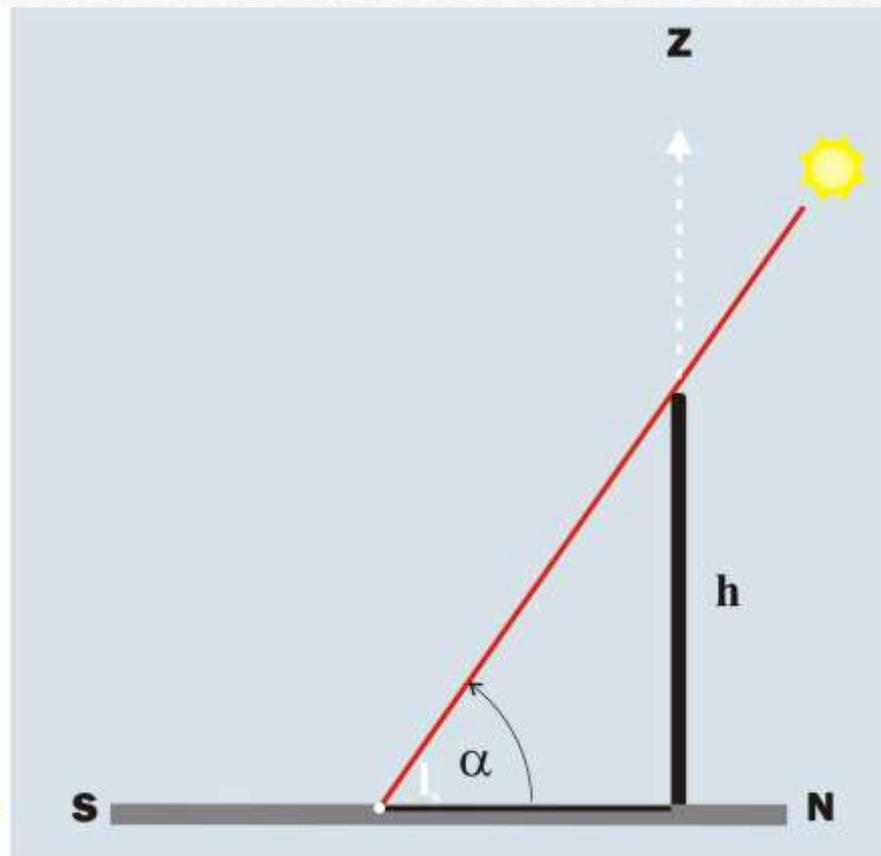
Se usa para mostrar las variaciones de los días luz y las estaciones del año

Conocida la longitud del palo, hay que medir la longitud de la sombra y calcular el ángulo  $\alpha$  que nos da directamente la altura del Sol sobre el horizonte.

Esto también nos daría la posibilidad de hallar la altura de la culminación del Sol en un día cualquiera.



## Altura del Sol



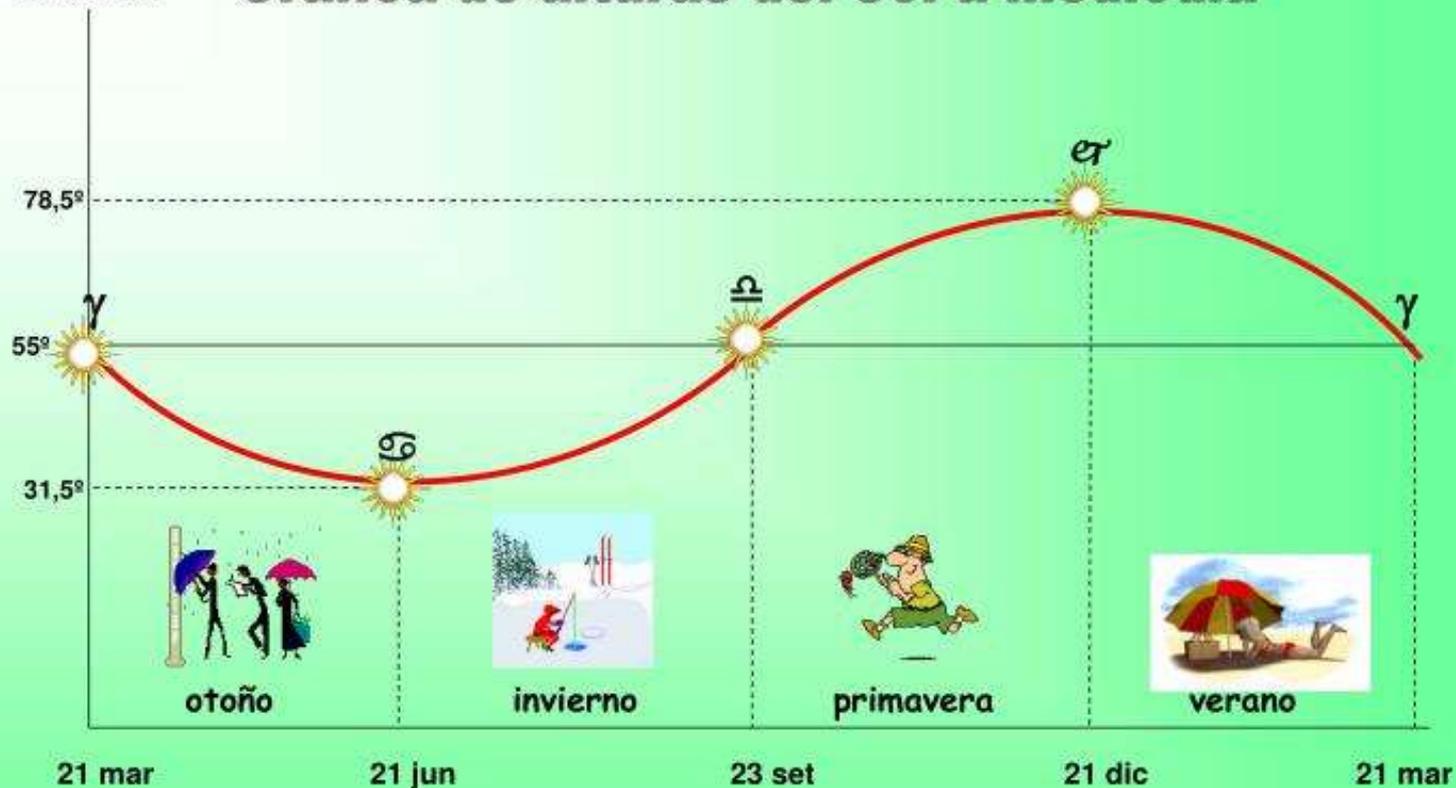
$$\text{arc tg } h/l_s = \alpha$$



Día del año (Chivilcoy)	Altura del Sol a mediodía
21 de enero	75°
21 de febrero	65,7°
21 de marzo	55°
21 de abril	43:1°
21 de mayo	34,8°
21 de junio	31,7°
21 de julio	34,7°
21 de agosto	43°
22 de septiembre	55,2°
21 de octubre	65.8°
21 de noviembre	75°
21 de diciembre	78,5°

h  
mediodía

## Gráfica de alturas del Sol a mediodía



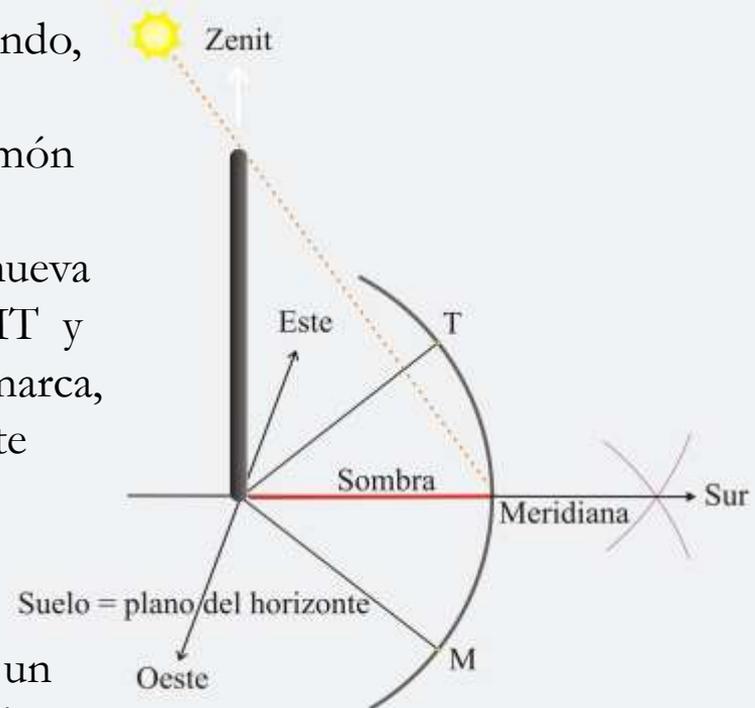
¿Te has dado cuenta que es siempre la misma gráfica?

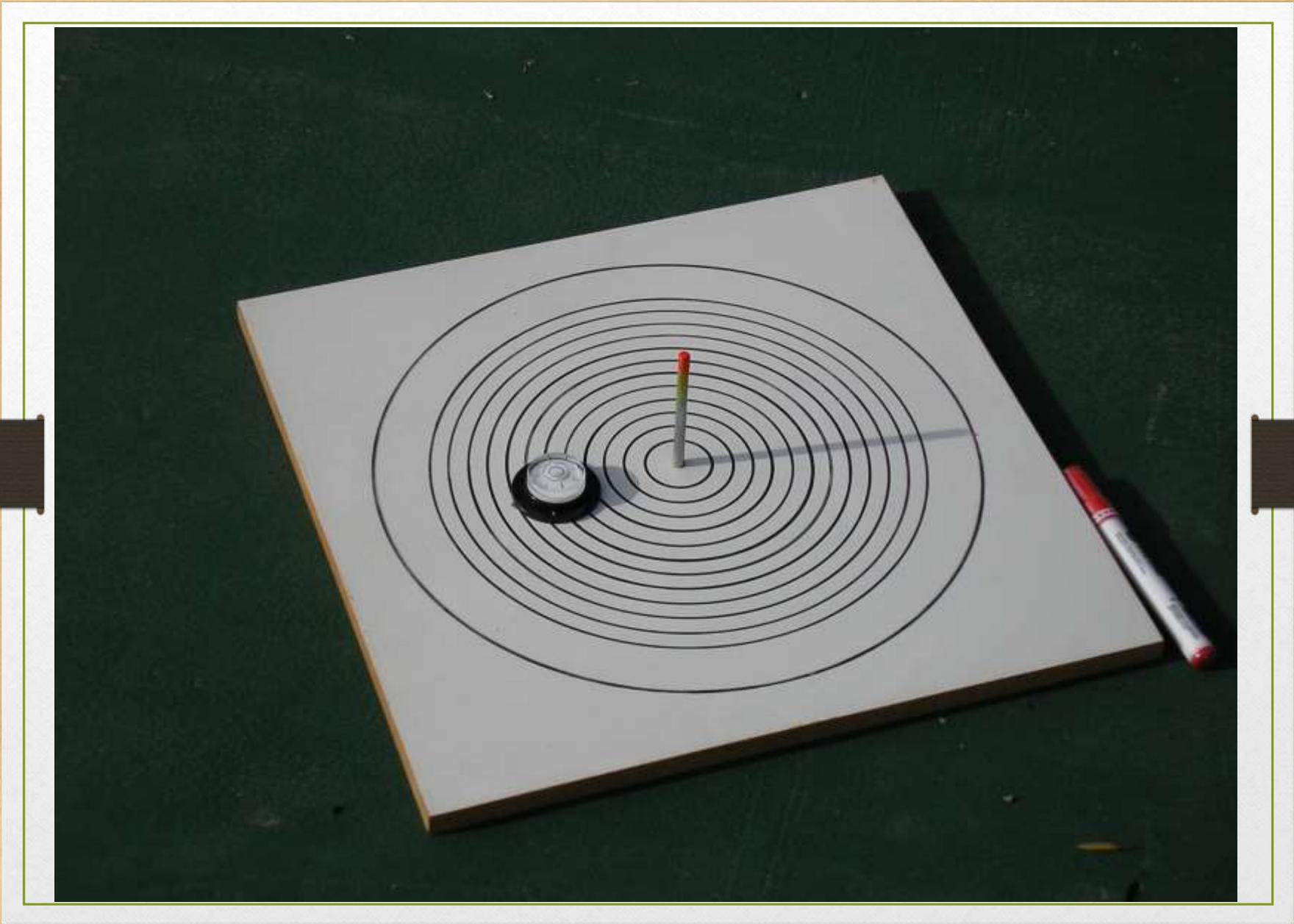
Midiendo la altura a diario, los antiguos lograron trazar la eclíptica.

## Determinación de la meridiana

A la mañana, antes del mediodía, marca en el suelo (punto M) el extremo de la sombra del gnomón. Haciendo centro en la base del gnomon y con radio igual a la longitud de la sombra traza un semicírculo. A medida que el Sol se mueve sobre su trayectoria aparente, la longitud de la sombra se irá acortando, hasta hacerse mínima al mediodía, para luego comenzar a crecer. Cuando la sombra del gnomón caiga sobre el semicírculo, las longitudes de la mañana y la tarde serán iguales y tendrás una nueva marca (punto T). La mediatriz del segmento MT y la bisectriz del ángulo que forman la primera marca, la base del gnomón y la segunda marca, permite determinar la dirección Norte – Sur.

Para hallar la bisectriz, se puede usar la misma cuerda que para hacer el semicírculo. Haciendo centro en la primera marca, se traza un arco. Luego haciendo centro con el mismo radio en la segunda marca, se traza otro arco. La intersección de ambos, unida a la base del gnomón, deja determinada la línea meridiana.





## Determinación línea Este - Oeste

Continuando la observación, al trazar la perpendicular a la línea norte-sur se obtiene la línea este – oeste.

Dado que los levantes se hallan en la zona oriental del horizonte y los ponientes en la occidental, puede verificarse que, al comenzar el movimiento aparente del Sol, las sombras apuntan hacia la zona occidental, en el mediodía se hallan justo en la meridiana que separa ambas zonas y luego, la dirección de la sombras será hacia la zona oriental.

Si en un día equinoccial, marcáramos la longitud de la sombra en dos o más oportunidades, la unión de las marcas determina la línea Este – Oeste.



Si durante todo un día, marcamos la punta de la sombra de un gnomón, el conjunto de marcas resultante dará una curva llamada hipérbola. Al ser diferente la altura del Sol de cada día, estas curvas serán diferentes según los días del año. El sentido de la concavidad de la hipérbola de sombra es diferente en cada época del año, en **otoño/invierno** sus extremos apuntan hacia el **suroeste y sureste**, mientras que en **primavera y verano** lo hacen hacia el **noreste y noroeste**. El día de los equinoccios, como ya dijimos, la resultante de unir todos los puntos extremos de sombra del gnomon, es una línea recta, en lugar de una **hipérbola**, su dirección es oeste – este.

## Determinación de la línea de sombras





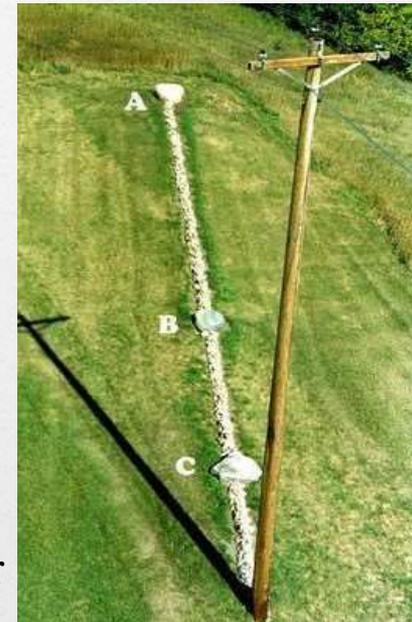
Por ejemplo, si hoy es 9 de diciembre, ¿cuántos días deberás esperar para que el día vuelva a durar lo mismo? Toma como referencia uno de los solsticios, el más cercano a la fecha, en nuestro caso: diciembre 22 para 2019. Cuenta cuántos días te separan de ese día:  $22 - 9 = 13$ , lo que ubica a la sombra de igual longitud 13 días después del solsticio, el 4 de enero.

La sombra del mismo gnomón, a la misma hora del día, tendrá la misma longitud el 9 de diciembre y el 4 de enero.

La diferencia es que el día 10, la sombra será más corta que la del 9, en cambio la sombra del día 5 será más larga.

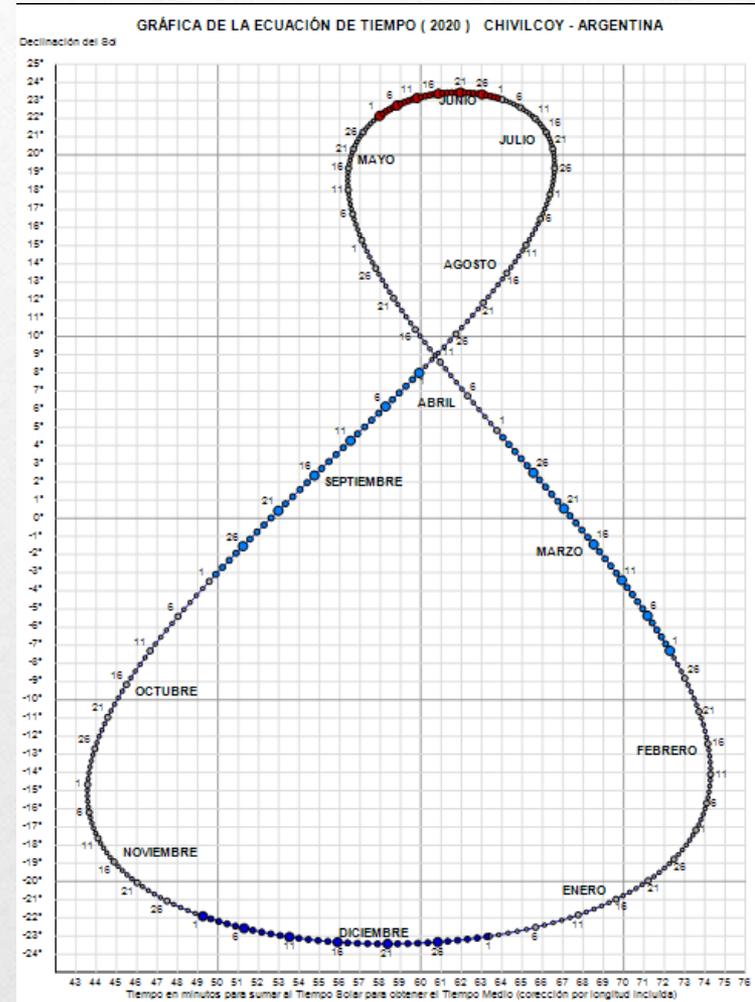
Esta circunstancia convierte al gnomón en un potente instrumento para señalar el "día del año" con sólo observar

la longitud de la sombra. A partir de estas observaciones se puede diseñar una meridiana calendario, donde se señalen días especiales tales como solsticios y equinoccios, cumpleaños, fechas históricas, etc.



# Trazado del analema solar

Como consecuencia del movimiento diurno, la sombra del palo se desplaza en el plano horizontal y cruza la línea Norte-Sur cuando el Sol culmina (máxima altura sobre el horizonte), eso ocurre cada mediodía. Si diariamente registramos la posición de la sombra de mediodía (o siempre a la misma hora, a lo largo de un año, siempre desde el mismo lugar de observación, el resultado será una figura, que también puede obtenerse fotografiando el Sol: **el analema**.



El Analema es una figura geométrica cuya forma recuerda al número ocho y es generada por la combinación de dos movimientos oscilatorios perpendiculares entre sí, uno producto de la Ecuación del Tiempo (transversal) que se realiza en el eje Este-Oeste y el otro por la declinación del Sol (axial) que ocurre en el eje Norte-Sur, el resultado es una figura de Lissajous.

Los extremos del analema demarcan las alternancias de las estaciones. El punto extremo al norte (sombra más corta) marca el solsticio de verano [que ocurre entre los días 21 y 23 de diciembre], la estación que sigue ocurrirá cuando las sombras corten el eje central, momento en que comienza el otoño. El punto que corresponde a la sombra más larga, al sur, es cuando ocurre el solsticio de invierno, luego cuando las sombras vuelvan al centro de la figura, se inicia la primavera, en septiembre. Vale la pena destacar que las estaciones aquí mencionadas son para el hemisferio sur, porque en el norte ocurre exactamente lo contrario en términos de características.

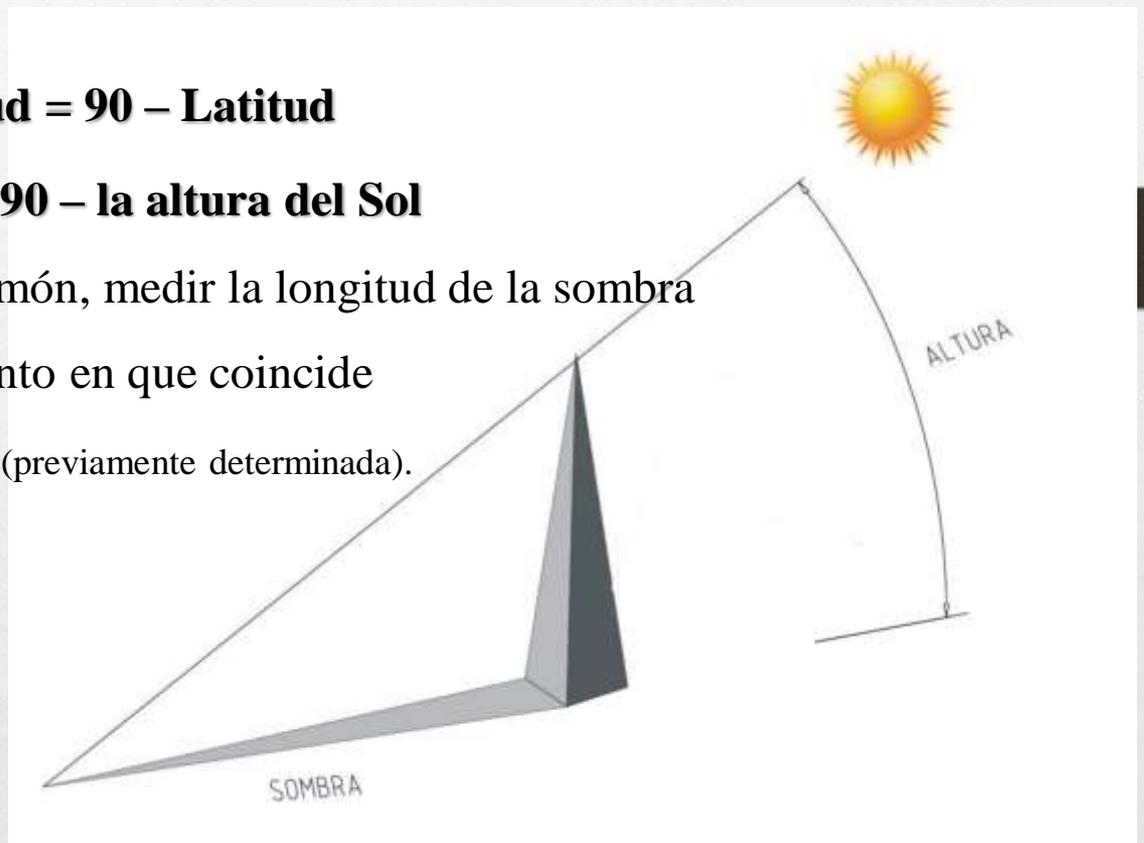
Para determinar la latitud es necesario conocer la declinación del Sol del día de la observación o bien buscar el día correspondiente al equinoccio de primavera u otoño. Estos días el Sol se ubica sobre el ecuador celeste, de modo que la latitud del lugar, es exactamente el ángulo complementario de la altura del Sol, es decir, la colatitud.

$$\text{Altura del Sol} = \text{Colatitud} = 90 - \text{Latitud}$$

por lo tanto la **Latitud** es **90 – la altura del Sol**

Siendo  $h$  la altura del gnomón, medir la longitud de la sombra que proyecta, en el momento en que coincide con la dirección norte sur (previamente determinada).

Esta sombra corresponde al mediodía y será la más corta de la jornada.

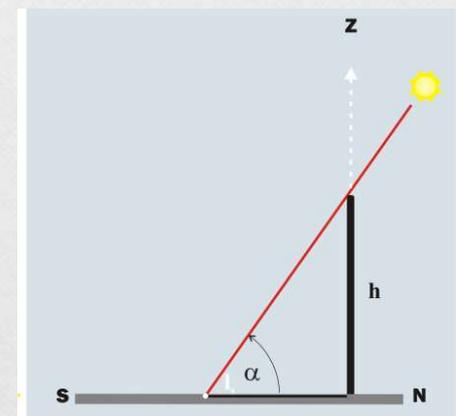
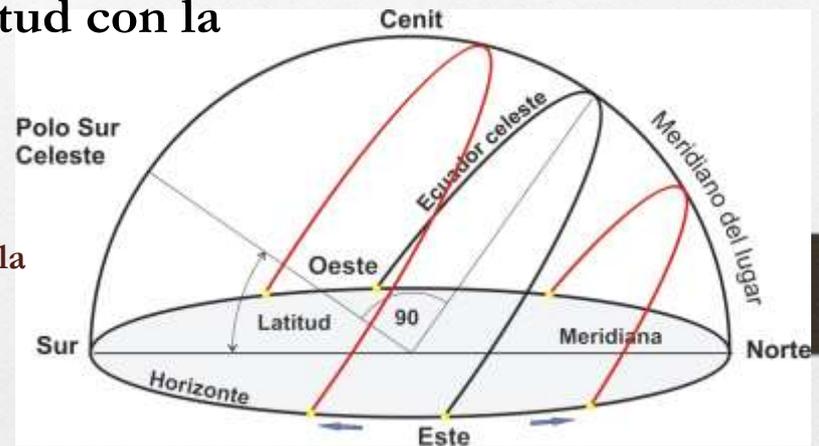


## Determinación de la latitud

El ángulo correspondiente a la altura del Sol ( $\alpha$ ), queda determinado por métodos trigonométricos, basta hacer  $\alpha = \arctg (h/b)$  De esta manera podemos obtener la medida de la latitud con la altura del Sol haciendo:  $\varphi = 90 - \alpha$

Si se disponen de varios gnomones puede mejorarse la medida de la latitud promediando los valores de los ángulos obtenidos y aplicando la teoría de errores.

Nota: El tamaño de la sombra del gnomón depende del Sol, siendo más pequeña al mediodía y más grande al amanecer y al atardecer, más grande en invierno y más pequeña en verano, porque el Sol está más o menos alto sobre el horizonte. Si podemos conocer la declinación podremos realizar la observación cualquier día.



La declinación solar  $\delta$  se calcula mediante la siguiente fórmula

$$\delta = 0.006918 - 0.399912 \cdot \cos(x) + 0.070257 \cdot \sin(x) - 0.006758 \cdot \cos(2x) + 0.000907 \cdot \sin(2x) - 0.002697 \cdot \cos(3x) + 0.001480 \cdot \sin(3x)$$

Donde  $x = (2\pi/365)(N-1+(h-12)/24)$

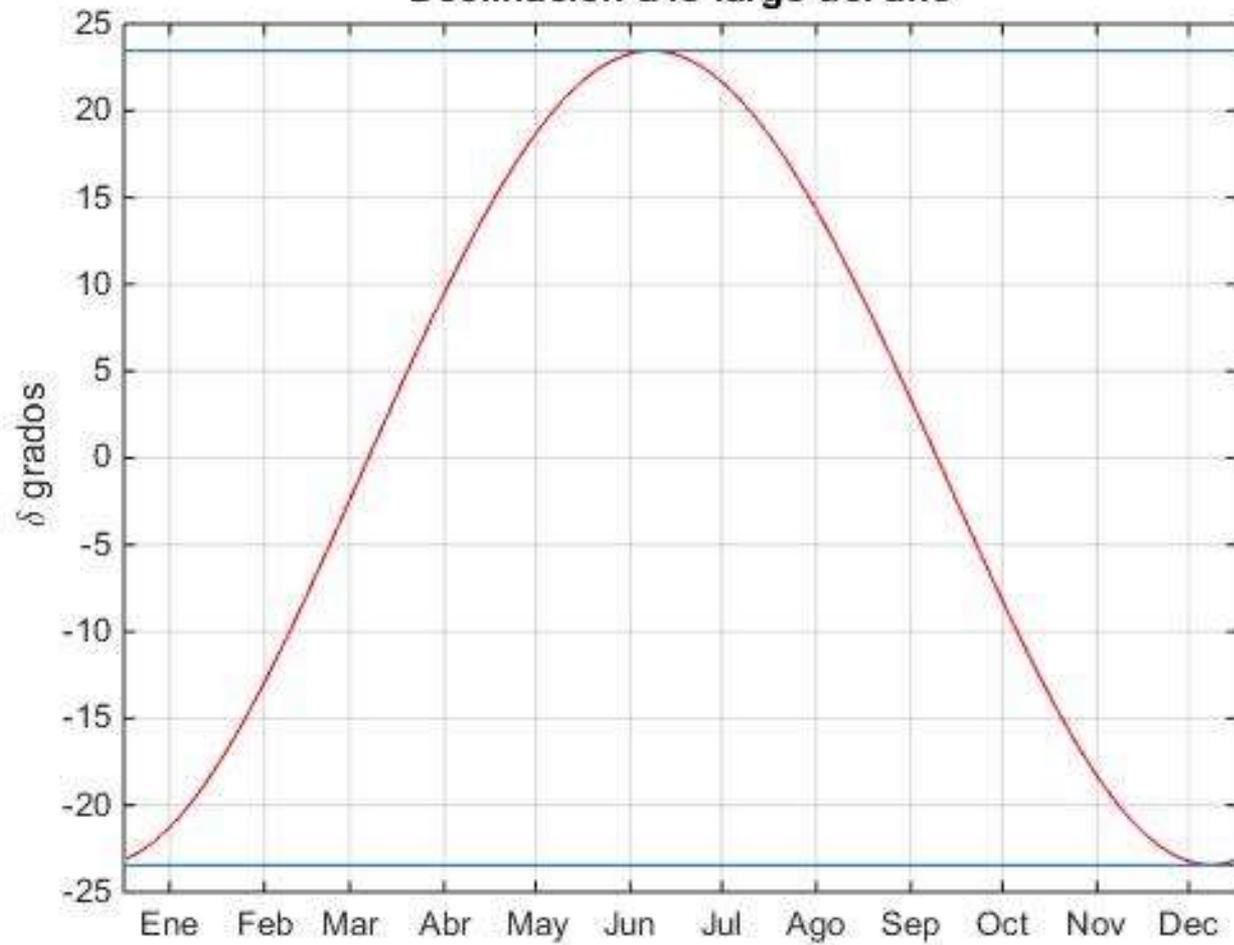
La tabla siguiente proporciona la conversión de día del mes  $d$  a número de día  $N$  en el año.

En caso de año bisiesto se añadirá uno más a partir del mes de Marzo. Por ejemplo en la casilla Marzo se pondría  $d+60$ , en la casilla Abril  $d+91$ , etc.

Calculada la declinación ( $\delta$ ) del Sol el día de la observación y determinada la altura máxima del Sol ( $\alpha$ ) en ese día, es decir, cuando pasa por el meridiano del lugar, la latitud ( $\varphi$ ) se obtiene utilizando  $\varphi = 90^\circ + \delta - \alpha$

Mes	Número de día, N
Enero	$d$
Febrero	$d+31$
Marzo	$d+59$
Abril	$d+90$
Mayo	$d+120$
Junio	$d+151$
Julio	$d+181$
Agosto	$d+212$
Septiembre	$d+243$
Octubre	$d+273$
Noviembre	$d+304$
Diciembre	$d+334$

### Declinación a lo largo del año



Se define como ecuación de tiempo ( $E_t$ ) a la diferencia de tiempo entre el tiempo solar verdadero (TSV) y el tiempo solar medio (TSM), el cual varía diariamente en un intervalo pequeño entre -14 y 16 minutos.

Spencer desarrolló un modelo matemático en términos de una serie de Fourier, para calcular  $E_t$  cualquier día del año con un error menor a 0,5 minutos.

$$E_t = (0,000075 + 0,001868 \cos\alpha - 0,032077 \operatorname{sen}\alpha - 0,014615 \cos\alpha - 0,040089 \operatorname{sen}2\alpha) \\ (229,18)$$

$$\text{Donde } \alpha = 2\pi \cdot (N-1)/365$$

El TSV se determina mediante la ecuación

$$\text{TSV} = \text{TSM} + 4 (L_s - L_L) + E_t$$

donde:

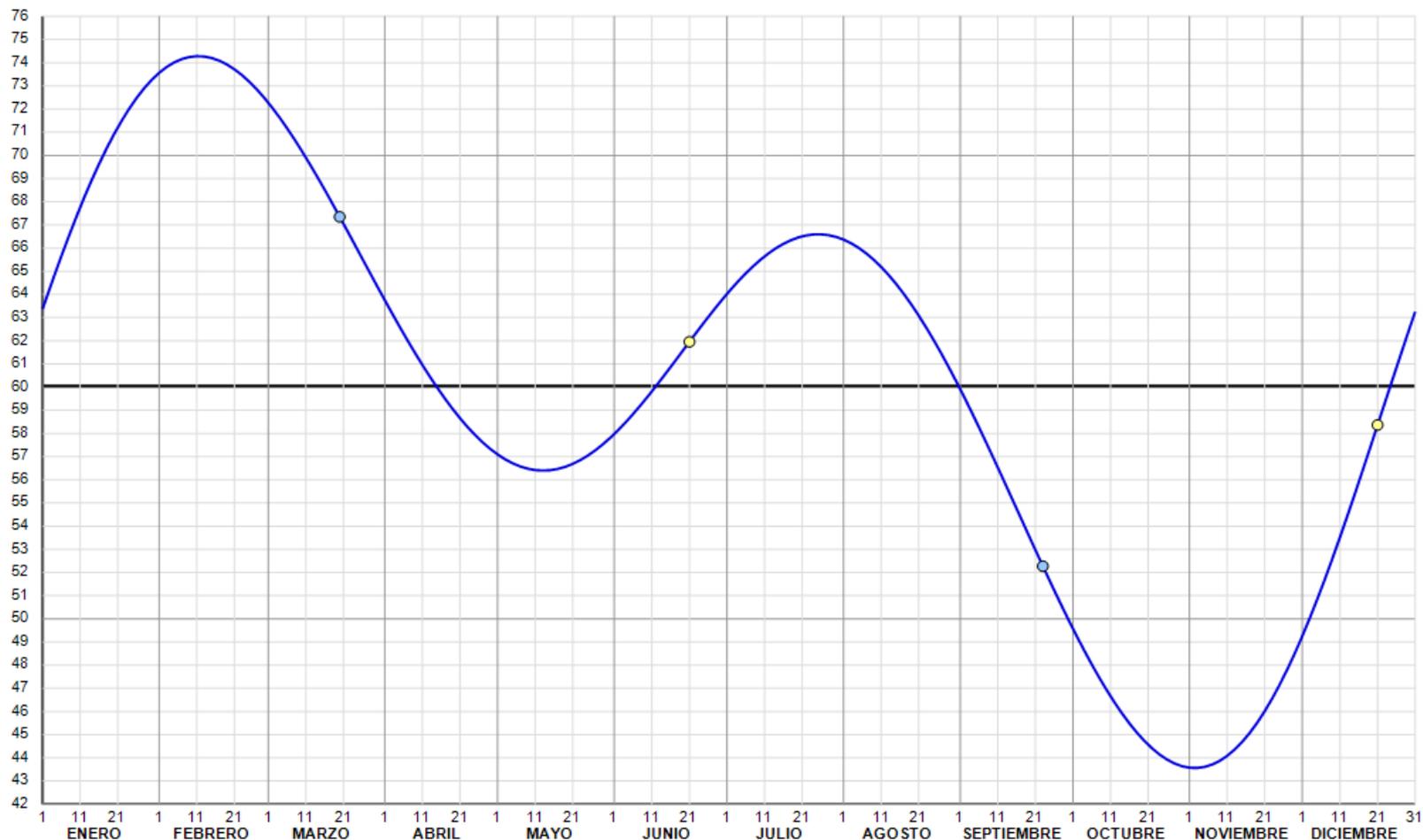
TSM = Tiempo solar medio

$E_t$  = Ecuación de tiempo

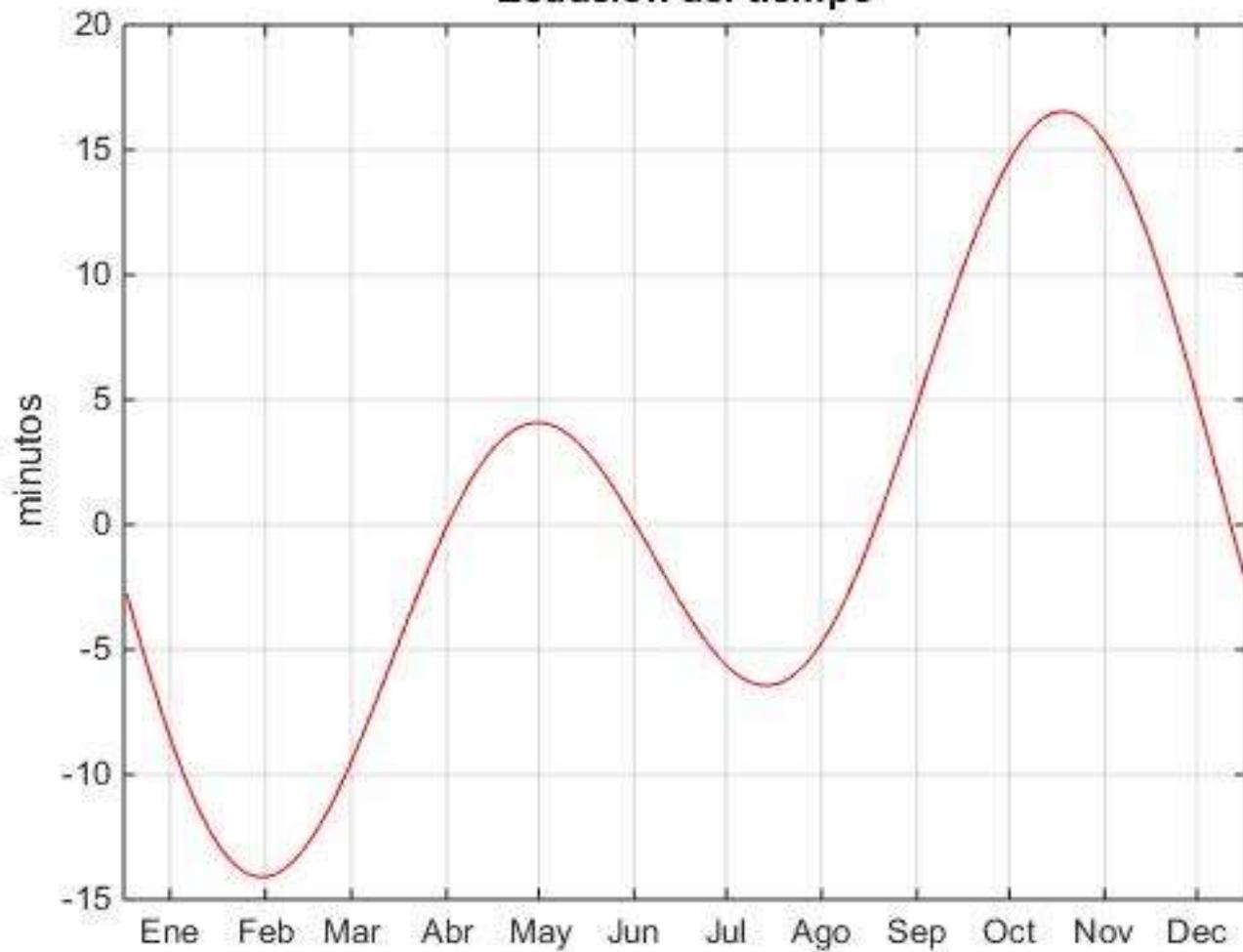
$L_s$  = Longitud geográfica del meridiano de referencia del país (en grados sexagesimales).

$L_L$  = Longitud geográfica del meridiano del lugar (en grados sexagesimales).

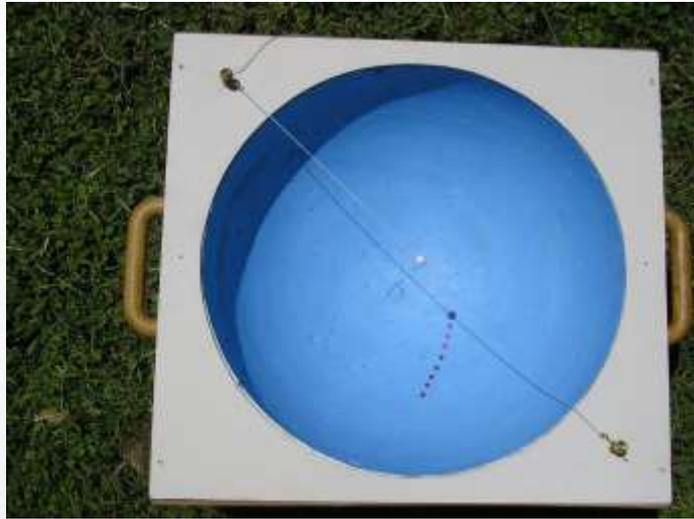
GRÁFICA DE LA ECUACIÓN DE TIEMPO ( 2020 ) CHIVILCOY - ARGENTINA  
Tiempo en minutos para sumar al Tiempo Solar para obtener el Tiempo Medio (corrección por longitud incluida)



### Ecuación del tiempo



# POLOS



En un día cualquiera **se obtendrá una línea curva que es simétrica a la que describe el Sol sobre el horizonte ese día.** Al representar el **interior del polos** la **bóveda celeste invertida**, podremos obtener información de: el camino del sol cada día, la altura del Sol, la duración del día, la oblicuidad de la eclíptica, la latitud del lugar de observación, el calendario solar.

El hecho de marcar la posición de la sombra de la bolilla a una hora determinada, nos proporciona una información sobre la altura del Sol en dicho momento.

La ecuación matemática sería:

$$h = \text{arc tg } l/s$$

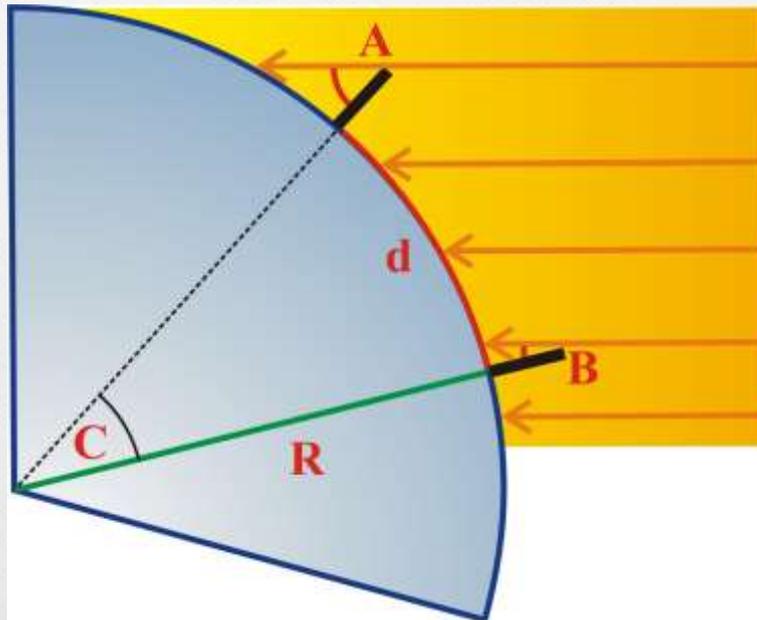
$l$  = distancia entre la bolilla y la semiesfera de telgopor

$s$  = distancia entre la sombra de la bolilla y el punto más bajo de la esfera de telgopor

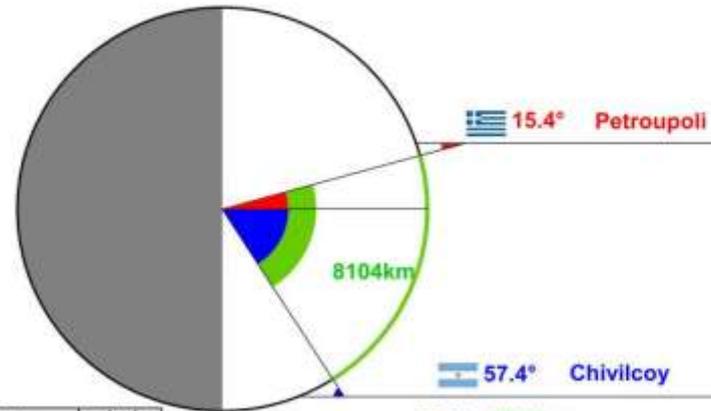
$h$  = ángulo que forma el Sol con el horizonte en el momento de la medición

# Medida del Radio de la Tierra

Basta obtener dos ángulos, resultados de medir la sombra de mediodía en dos lugares del planeta por ejemplo A y B, y conocer la distancia al Ecuador de ambos, para con cuentas simples lograr el objetivo de conocer el radio de la Tierra



04/06/2020 (Petroupoli-Greece) Latitude: 38.036°  
 04/06/2020 (Chivilcoy-Argentina) Latitude: -34.911°



Distance	Angle
circumference	360°
8104km	15.4° + 57.4°

$$\text{circumference} = \frac{360^\circ \times 8104\text{km}}{15.4^\circ + 57.4^\circ} = 40075 \text{ km}$$

$$R = 180 \cdot d / \pi \cdot (A \pm B)$$

# Amplitud de los ocasos respecto al cardinal Oeste

21,22 o 23 de Diciembre  
Solstício

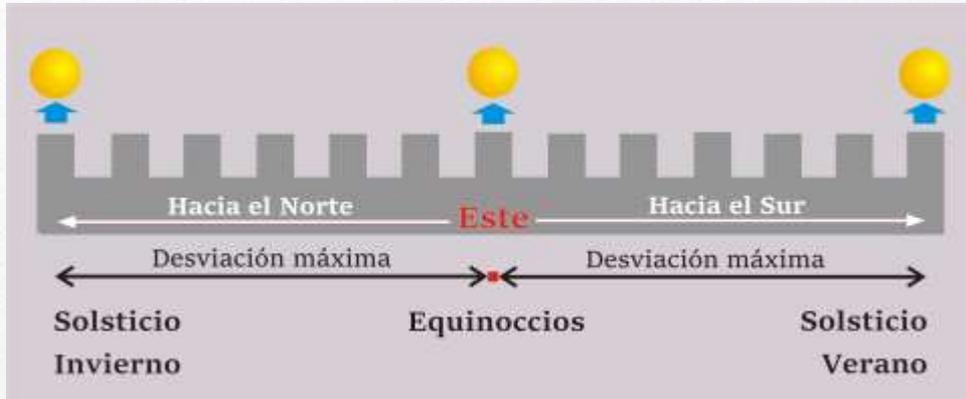
21, 22 o 23/09  
20,21/3  
Equinoccio  
**OESTE!**

20 o 21 de Junio  
Solstício

← Sur

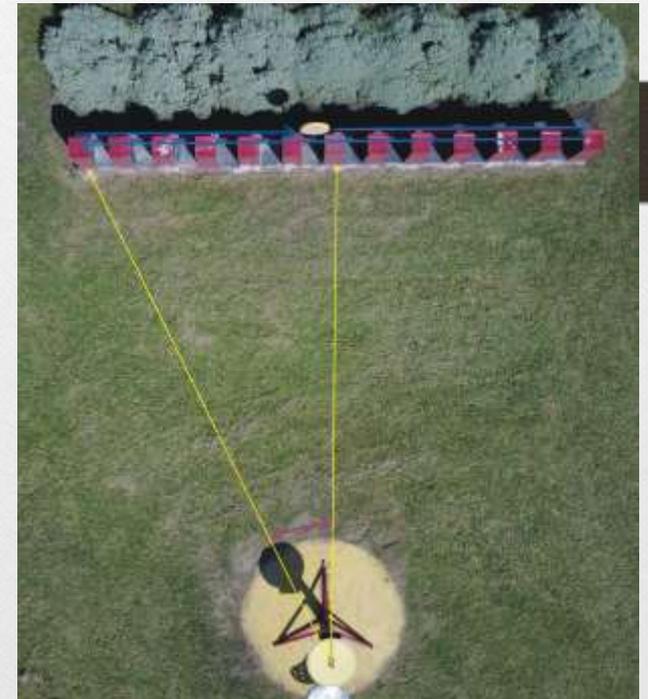
Norte →

# El Sol sale por el Este y se pone por el Oeste?

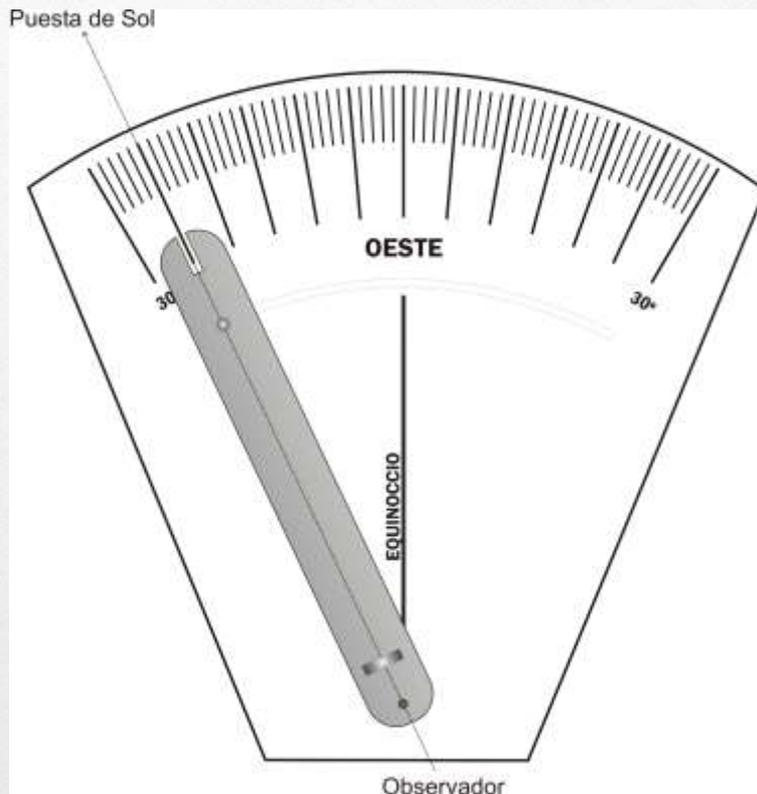


Apartamiento o amplitud

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\cos \varphi} = \frac{23.435}{\cos 34.91}$$



La amplitud se mide desde el E o el W hacia el N o hacia el S. Desde el E en el caso del orto y desde el W en el ocaso. No tiene signo como lo tiene el azimut, por eso el seno de la declinación figura en valor absoluto, y el coseno de latitud es siempre positivo.



Regla solsticial

$$\boxed{\text{sen } \theta_{\text{orto v ocaso}} = \frac{|\text{sen } d|}{\text{cos } l}}$$

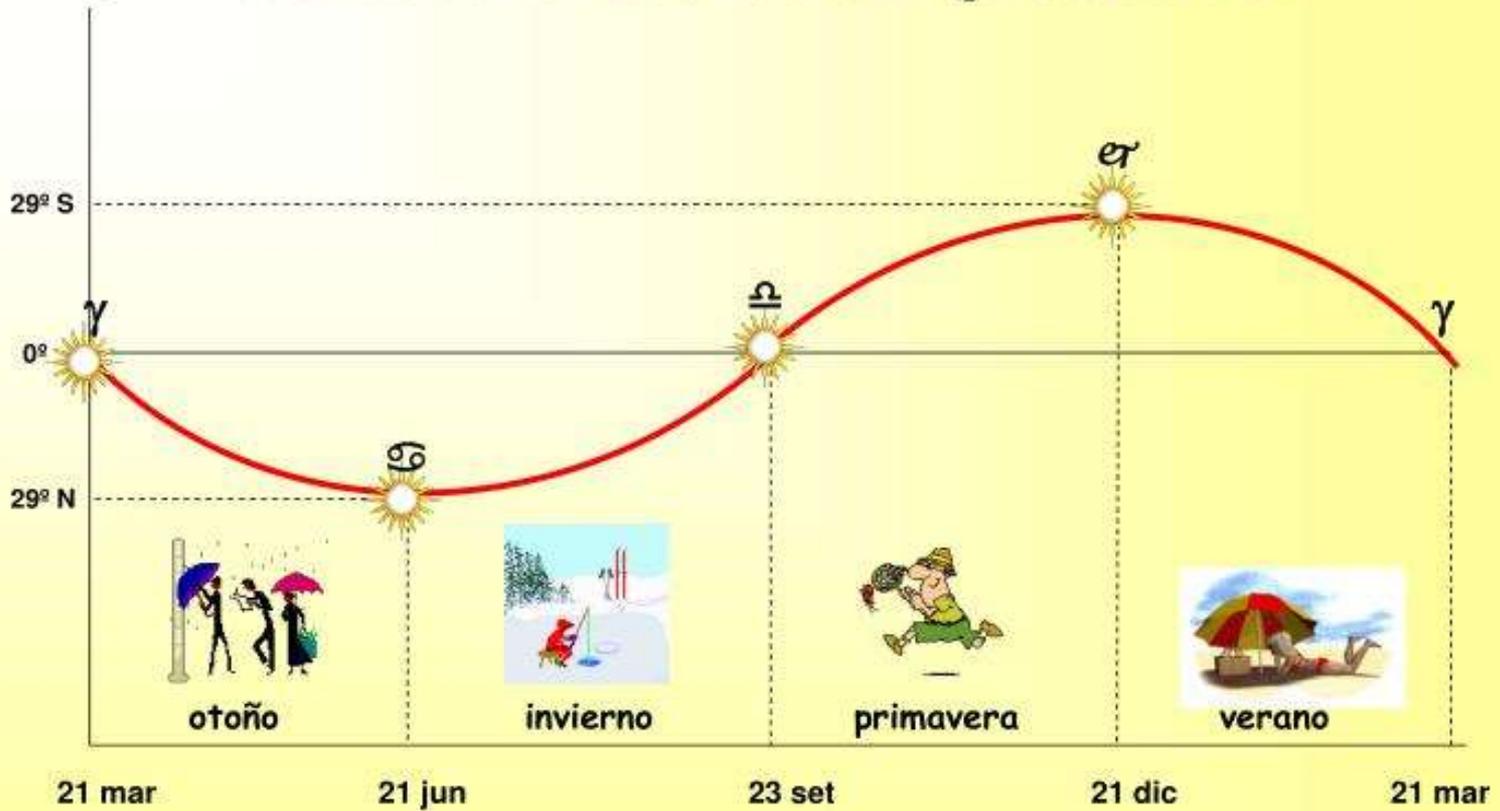
Donde  $d$  es la declinación y  $l$  la latitud



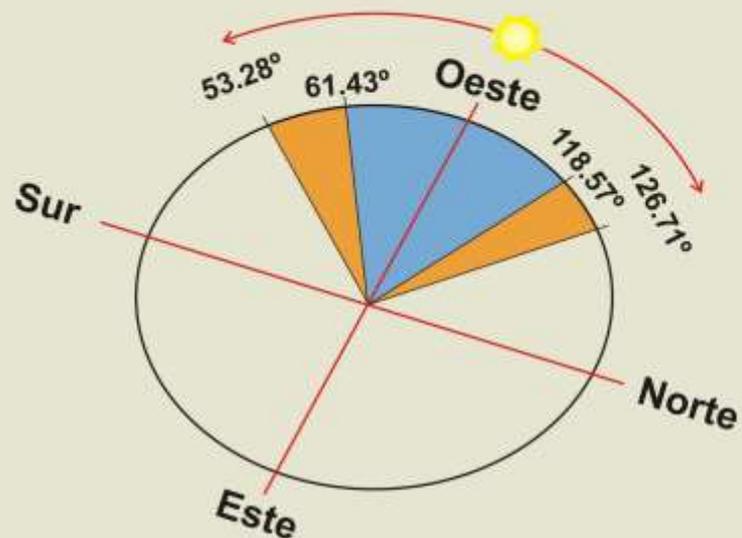


Amplitud

# Gráfica de variación de la Amplitud del Sol



## Comparación de las puestas de Sol en dos localidades diferentes



### ■ Chivilcoy

Latitud  $-34.90^{\circ}$

Acimut ocaso junio  $118.57^{\circ}$

Acimut ocaso diciembre  $61.43^{\circ}$

Amplitud de oscilación  $57.15^{\circ}$

### ■ Calafate

Latitud  $-50.34^{\circ}$

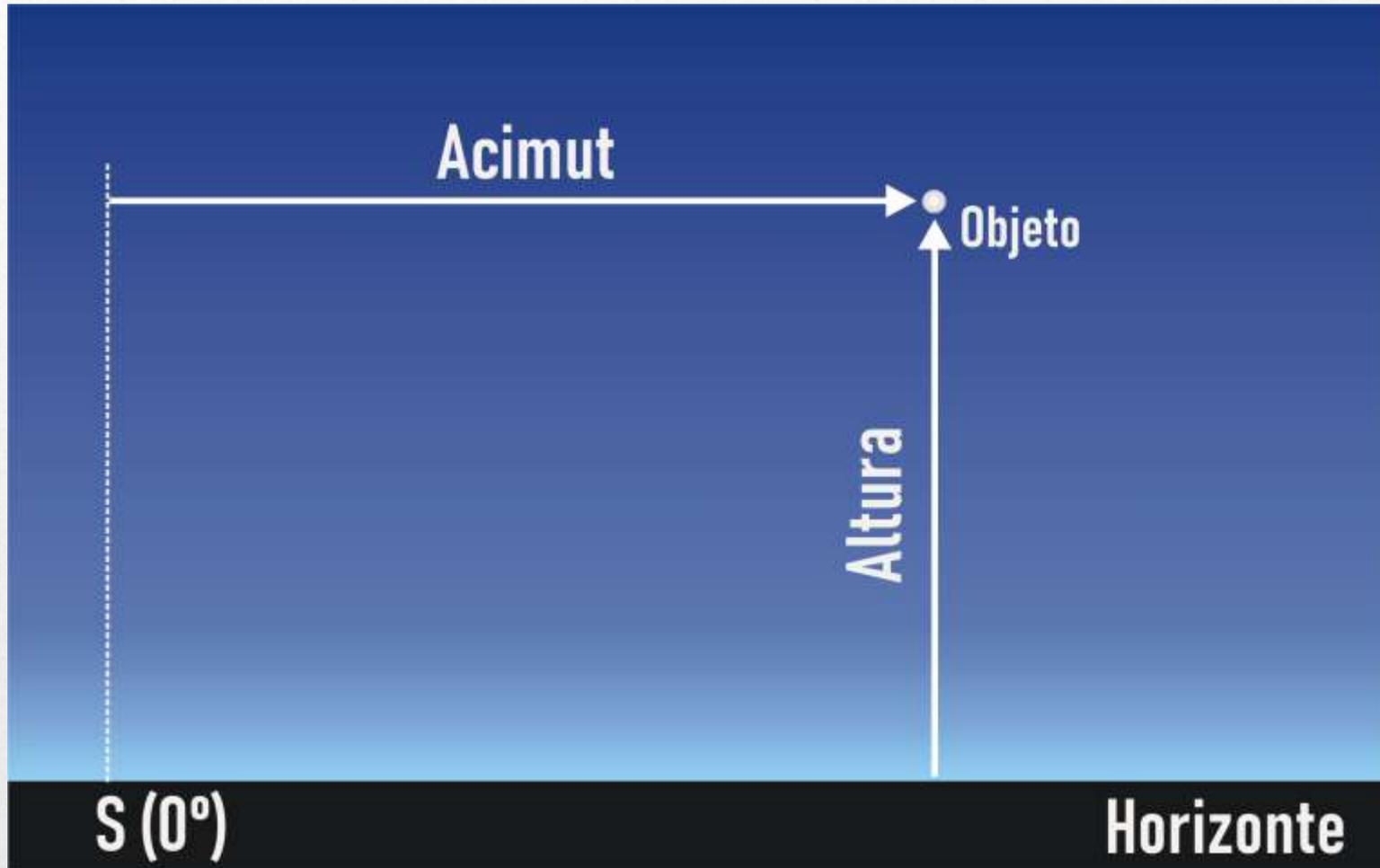
Acimut ocaso junio  $126.71^{\circ}$

Acimut ocaso diciembre  $53.28^{\circ}$

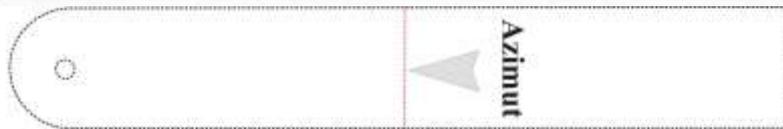
Amplitud de oscilación  $73.44^{\circ}$



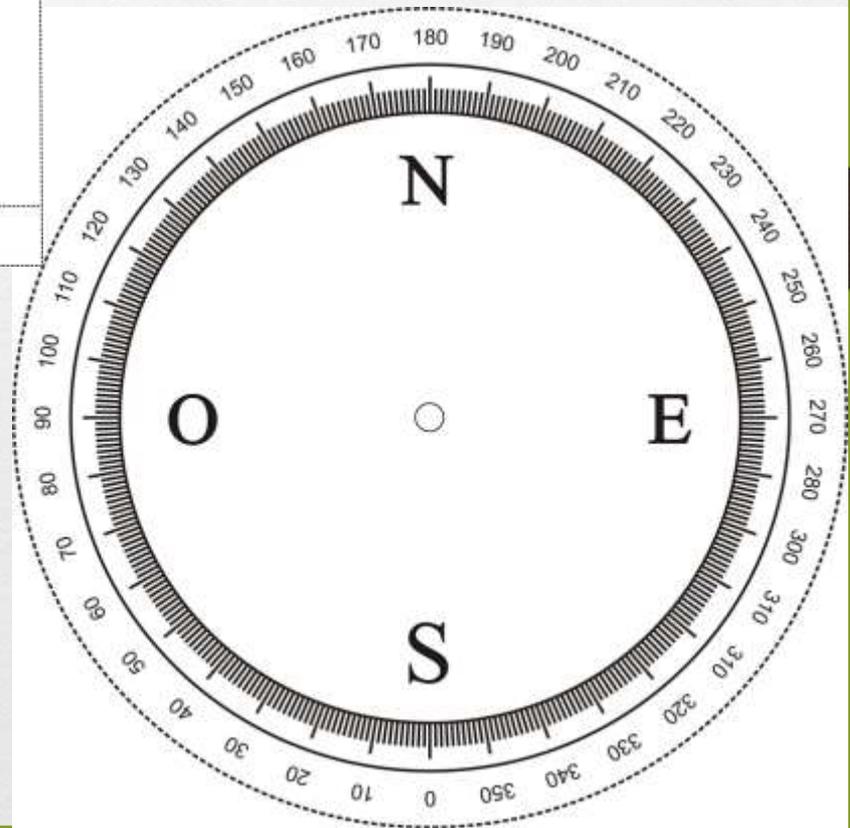
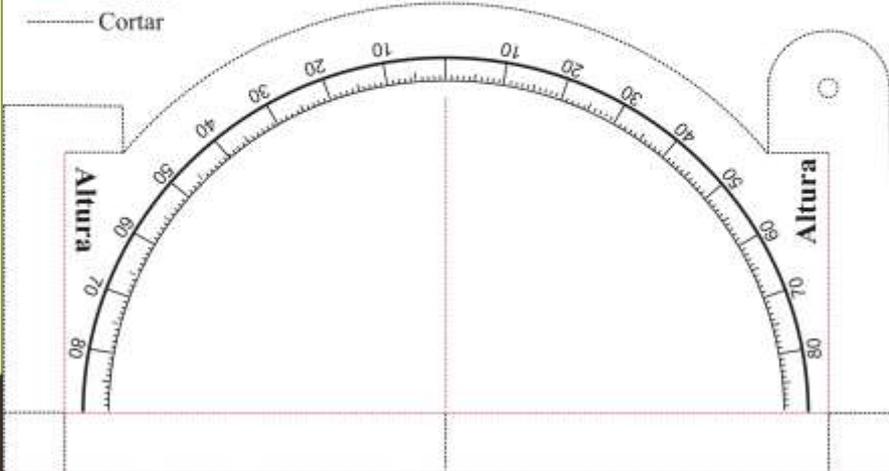
# Coordenadas Horizontales



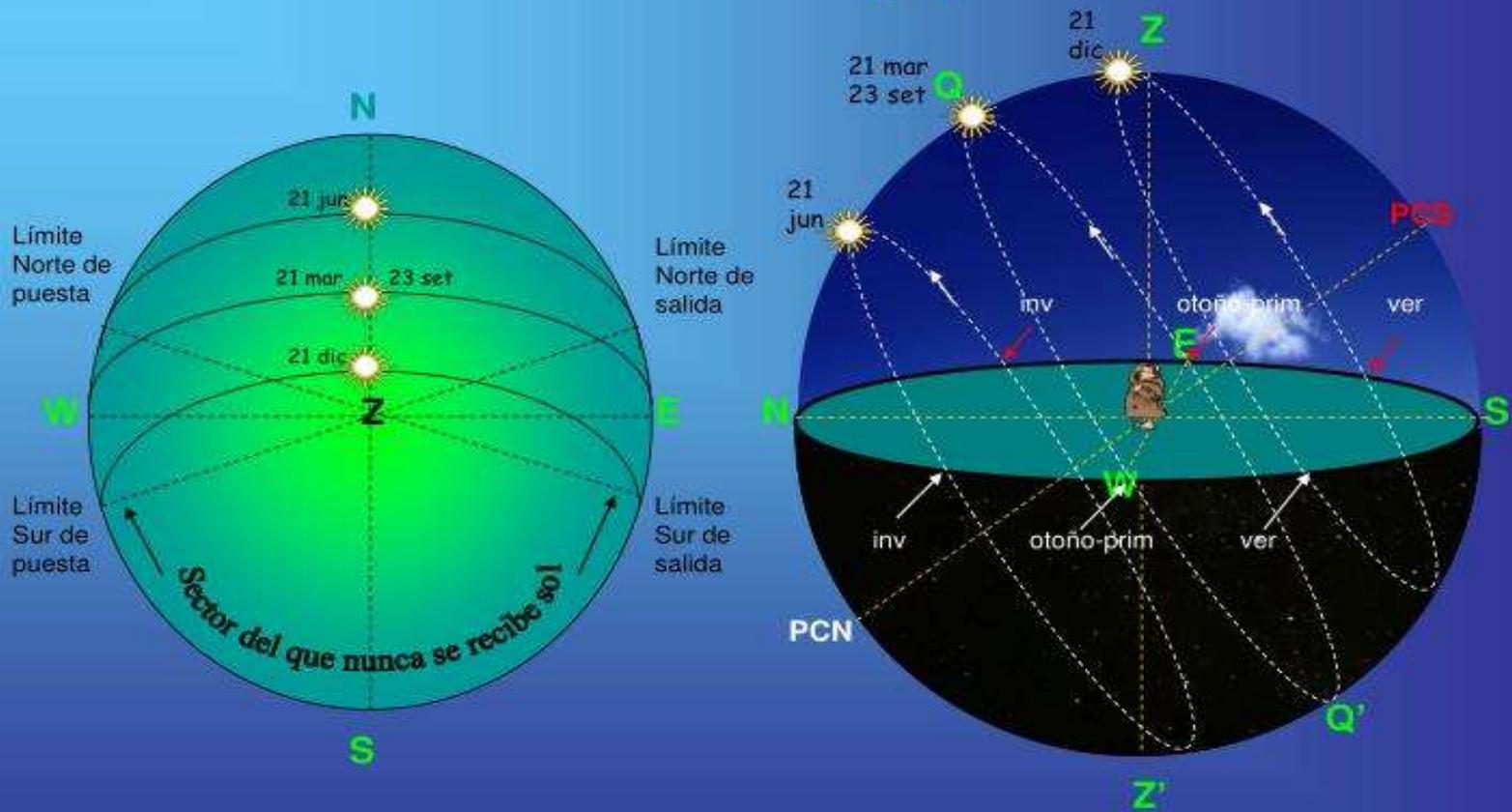




— Doblar  
— Cortar

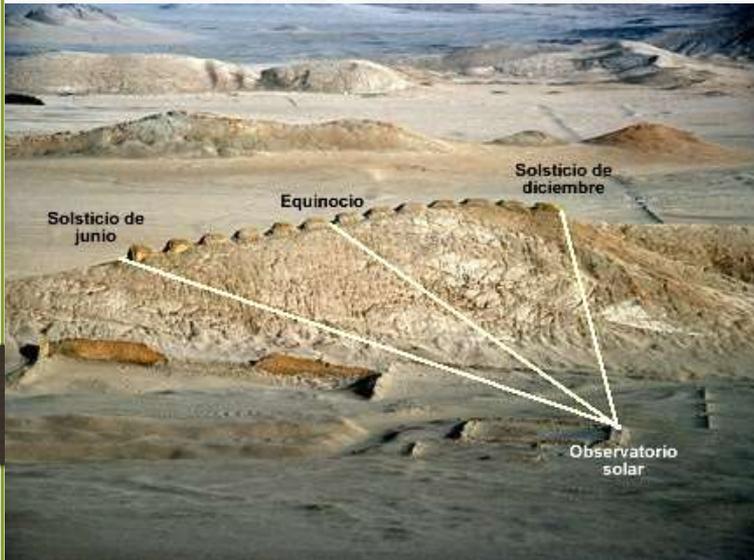


# Variación anual de salidas y puestas del Sol

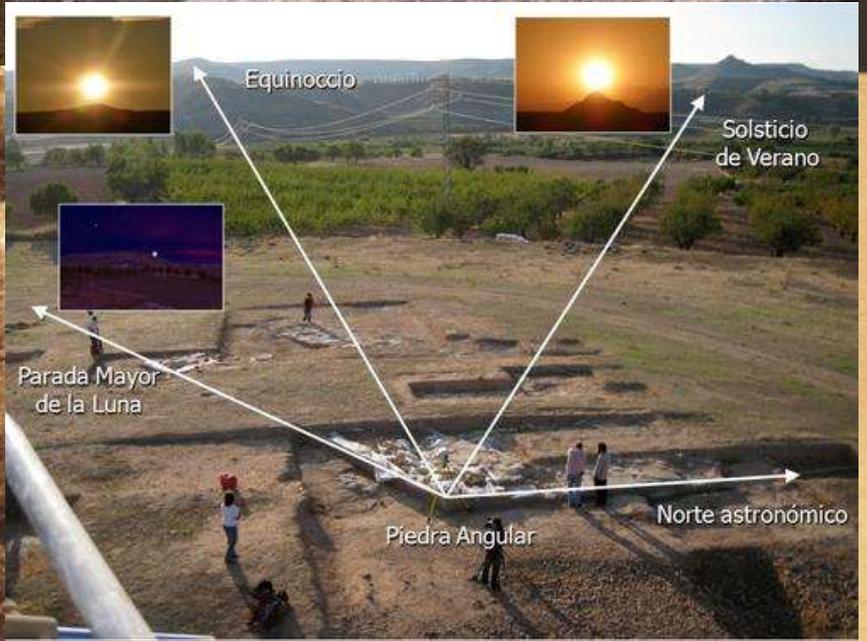


A mediodía se observa al Sol siempre hacia el Norte. Jamás hacia el Sur.

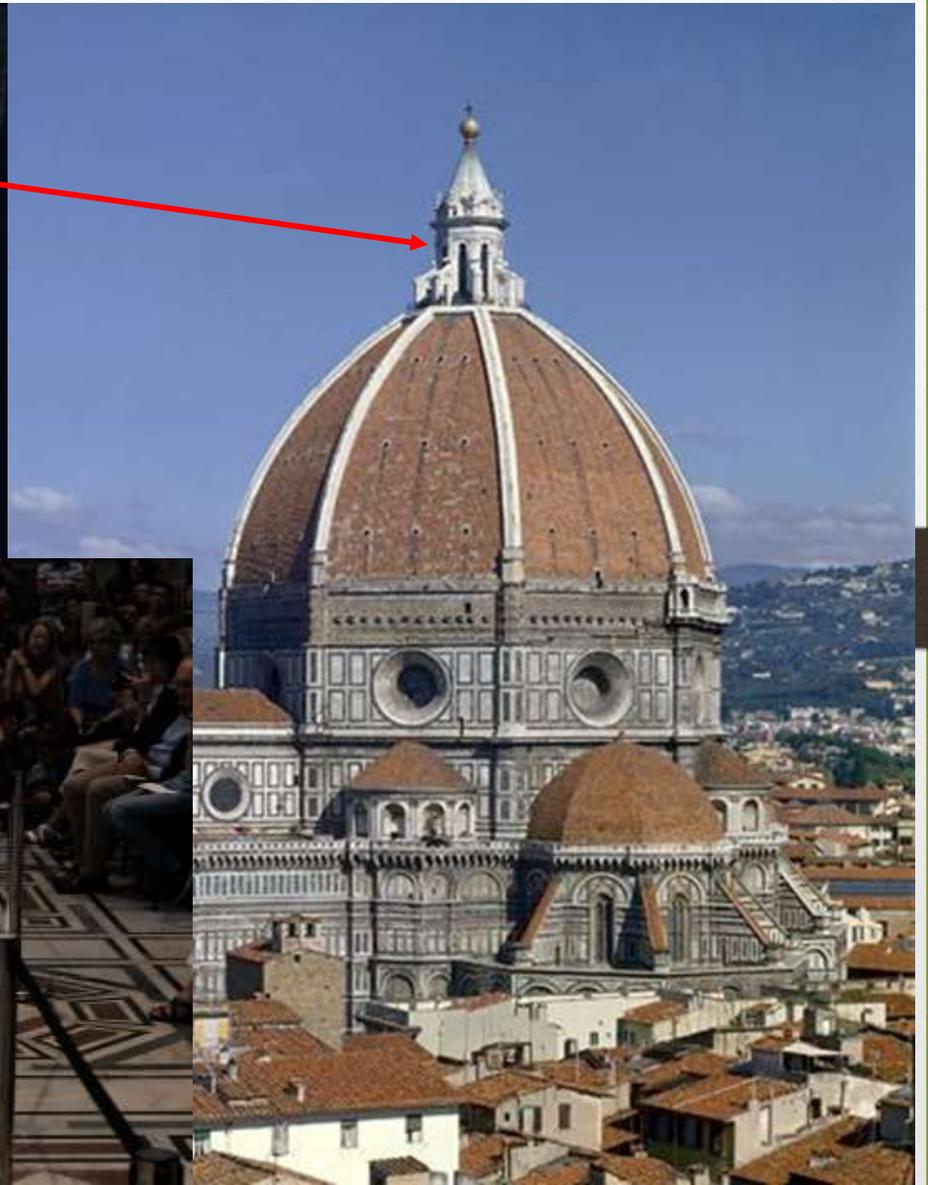
# Astronomía de horizonte



**Observatorios Astronómicos**  
**Las 13 torres de Chankillo**









También en Europa

GNOMON OF SAINT-SULPICE

