

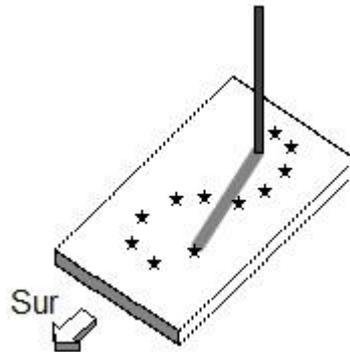
Diseño y Construcción
de un

Reloj Solar Analemático

Sergio Alonso
Parque Cielos del Sur

Analema

Si, a lo largo del año, nos tomáramos el trabajo de marcar regularmente en el suelo la sombra proyectada por el extremo superior de una varilla vertical siempre a la misma hora (por ejemplo una vez por semana a las 11AM), notaríamos un fenómeno muy interesante: la sombra no está siempre en el mismo punto sino que describe una figura en forma de 8 alargado. Esta figura recibe el nombre de **analema**.



Esto tiene implicancias muy importantes. La primera y más notoria es que la posición del Sol en el cielo a una hora determinada, no es la misma a lo largo del año.



Esto se debe en parte al cambio en la *declinación* del Sol, es decir al cambio que experimenta el ángulo que forma el Sol con el Ecuador Celeste a lo largo del año, lo que está directamente relacionado con la inclinación del eje terrestre.

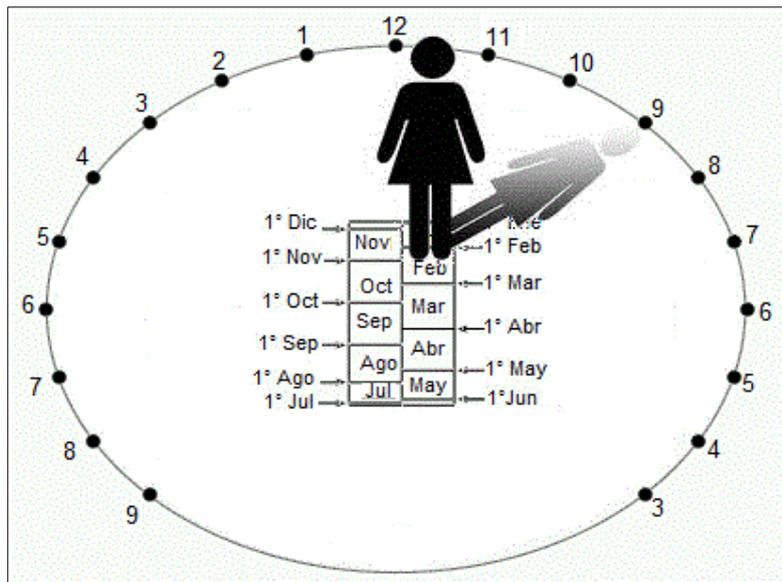
Otro factor que hace que el Sol no esté en la misma posición en el cielo a una misma hora a lo largo del año, es el hecho de que la velocidad de traslación terrestre, es decir la velocidad con que la Tierra se desplaza alrededor del Sol, no es constante. Esta variación de velocidad se debe a que la órbita terrestre no es perfectamente circular sino que es elíptica y por lo tanto la Tierra en determinado momento del año se acerca al Sol aumentando su velocidad de traslación, y en otro momento se aleja, disminuyéndola.

La posición del Sol, como la de cualquier objeto en el cielo queda determinada por dos coordenadas. Una es el *azimut*, que corresponde al ángulo que forma el Sol con el meridiano del lugar, medido sobre el horizonte. La otra coordenada es la *altura*, que es el ángulo que forma el Sol con el horizonte. Conociendo los cambios de *azimut* y *altura* que experimenta el Sol para una misma hora a lo largo del año, es posible predecir dónde se ubicará la sombra del extremo superior de una varilla vertical, para esa hora, a lo largo del año. Si hacemos lo mismo para el resto de las horas del día, podremos construir un reloj solar que compense los cambios en azimut y altura a lo largo del año. Este tipo de relojes solares reciben el nombre de "analemáticos".

¿Qué es un reloj Solar Analemático?

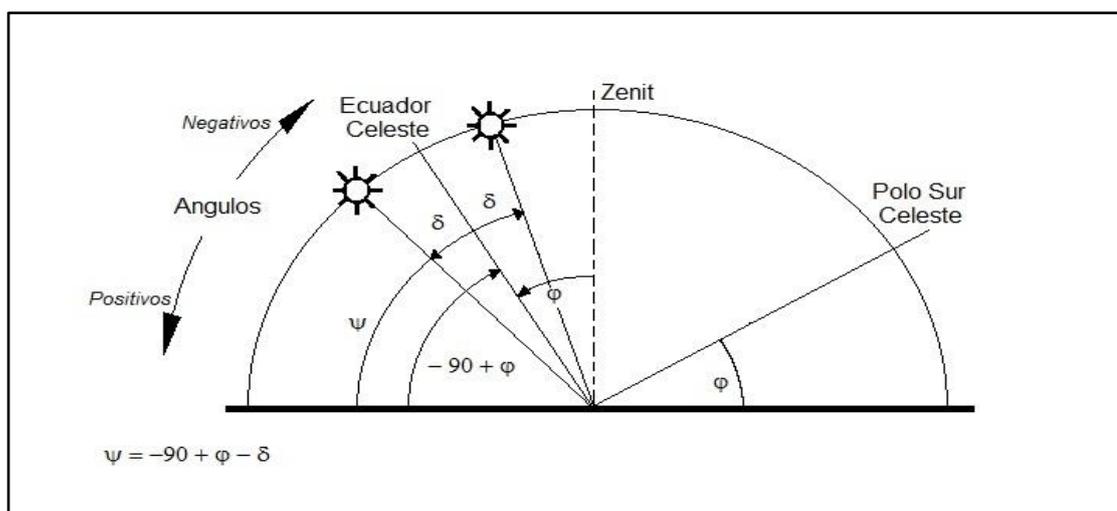
Un reloj solar analemático es un tipo particular de reloj solar horizontal, en el cual el objeto que proyecta la sombra es vertical, y se coloca en un punto distinto de la placa según la fecha. La hora se lee a partir de la sombra proyectada por la vara vertical que cruza puntos horarios dispuestos sobre una elipse. Esto hace que sea muy diferente a los relojes de Sol tradicionales de los que se ven habitualmente en parques y jardines, donde la sombra es proyectada por un perfil de forma triangular.

Una posibilidad interesante que ofrecen los relojes solares analemáticos es que pueden construirse en espacios abiertos usando como vara vertical a las personas que lo visitan. Estas se paran sobre una grilla de meses ubicada hacia el centro de la placa y obtienen la hora a partir de la sombra proyectada sobre puntos horarios distribuidos sobre una elipse.



Consideraciones de diseño

Las dimensiones del reloj solar analemático estarán en función de los tamaños de las sombras proyectadas por una misma persona en distintas épocas del año.



Tamaño de las sombras

En la figura vemos que el Ecuador Celeste está inclinado, con respecto a la vertical del lugar (recta Zenit-Nadir) a un ángulo igual a la latitud del lugar.

Esto significa que si medimos la altura del Ecuador Celeste en su punto más alto con respecto al horizonte (el punto donde el Ecuador Celeste intersecta al meridiano del lugar), su altura será de 90° menos la latitud del lugar.

Si adoptamos la convención de que los ángulos que barren hacia el Norte son positivos mientras que los que barren hacia el Sur son negativos, la altura del punto de intersección entre el Ecuador Celeste y el meridiano del lugar será:

$$AltEc = -90 + \varphi$$

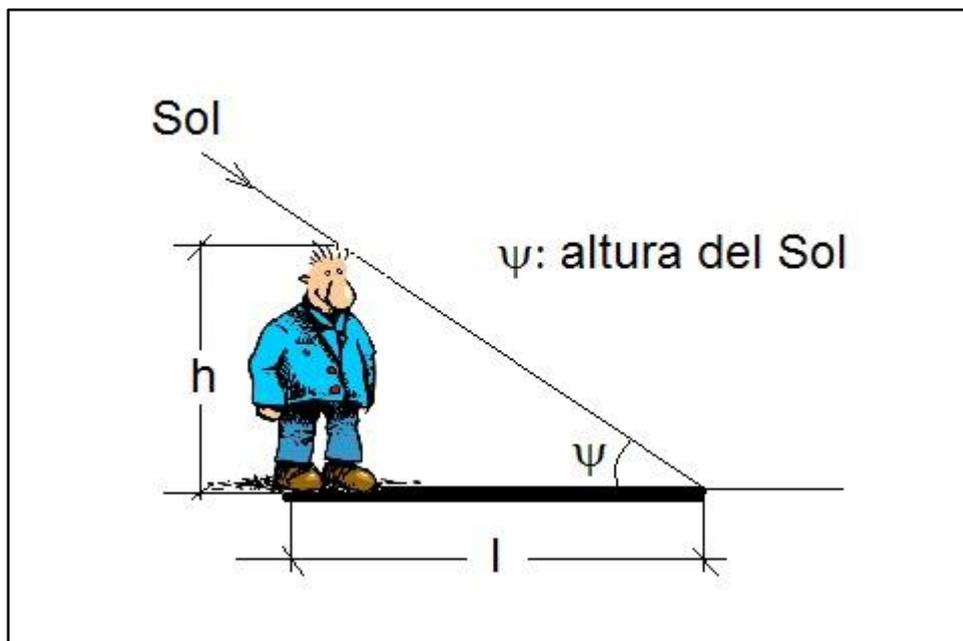
Para obtener la altura del Sol al mediodía, debemos restarle a la altura del Ecuador Celeste, el ángulo de declinación δ que el Sol tenga para el día en cuestión. De esta manera, la Altura ψ del Sol con respecto al Horizonte al mediodía estará dada por:

$$\psi = AltEc - \delta$$

Es decir:

$$\psi = -90 + \varphi - \delta$$

La altura del Sol con respecto al horizonte equivale al ángulo con que los rayos solares inciden sobre la superficie del lugar. Por lo tanto la longitud de la sombra que proyecta una persona al mediodía, dependerá de la altura de dicha persona y de la altura que tenga el Sol con respecto al horizonte:



Esta persona, cuya altura es h , proyectará una sombra de longitud l , que estará dada por la siguiente expresión:

$$l = h \times \cot g \psi$$

Como, por simplicidad, estamos tomando la altura del Sol en el momento del mediodía solar, es decir, cuando el Sol se encuentra más alto con respecto al horizonte, la expresión anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$l = h \times \cotg(-90 + \varphi - \delta)$$

$$l = h \times \cotg(-(90 - \varphi + \delta))$$

$$l = -h \times \cotg(90 - (\varphi - \delta))$$

$$l = -h \times \tg(\varphi - \delta)$$

Por ejemplo en Chivilcoy, donde la latitud $\varphi = -35^\circ$, el día del **equinoccio de primavera** al mediodía, cuando la declinación $\delta = 0^\circ$, una persona que tenga una altura de 1,80m proyectará una sombra de:

$$l = -1,80m \times \tg(-35^\circ) = 1,26m$$

En el **solsticio de verano** al mediodía, cuando la declinación $\delta = -23,44^\circ$, la misma persona proyectará una sombra de:

$$l = -1,80m \times \tg(-35^\circ - (-23,44^\circ)) = -1,80m \times \tg(-11,56^\circ) \approx 0,37m$$

Por último, en el **solsticio de invierno** al mediodía, cuando la declinación $\delta = +23,44^\circ$, la misma persona proyectará una sombra de:

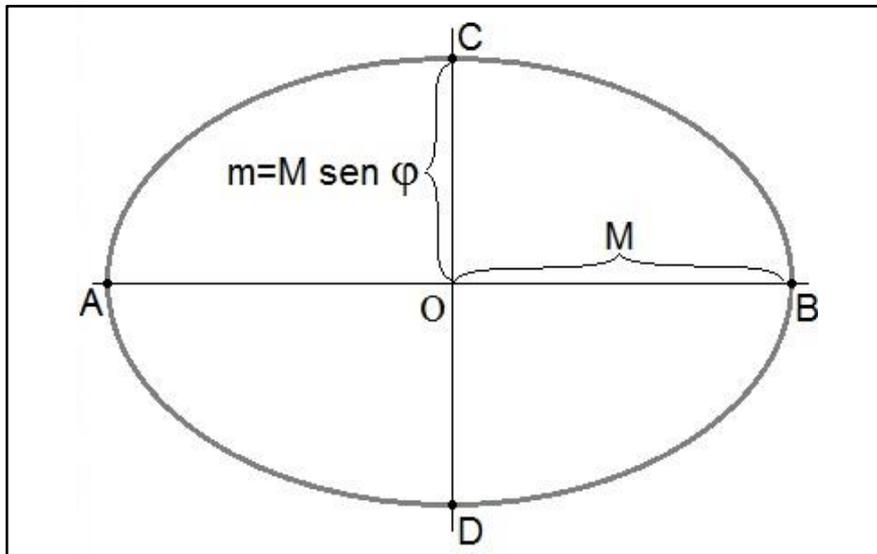
$$l = -1,80m \times \tg(-35^\circ - (23,44^\circ)) = -1,80m \times \tg(-58,44^\circ) = 2,93m$$

Como puede apreciarse, el rango de longitudes de las sombras proyectadas por una persona de 1,80m de estatura al medio día en distintos momentos del año, va de cerca de 40 cm a casi 3 metros.

Teniendo en cuenta que al mediodía el Sol está en su punto más alto y que por lo tanto la sombra proyectada por cualquier objeto es la más corta del día, será necesario dimensionar el reloj analemático para que admita sombras como mínimo de los tamaños calculados más arriba y mucho más grandes.

Pasos para construir un Reloj Solar Analemático:

- 1) Trazar una línea CD en sentido Norte-Sur (es decir, que coincida con la meridiana del lugar) , con el punto C hacia el Sur. Trazar otra línea AB, perpendicular a la primera, en sentido Este-Oeste y cruzando a la línea CD en el punto central O.



- 2) Sobre la línea AB se dispondrá el eje mayor de la elipse, tomando la distancia OB como semieje mayor M , al que asignaremos un valor de 1. Esto nos permitirá luego escalar el tamaño del reloj analemático a las dimensiones deseadas de manera simple.
- 3) El semieje menor m de la elipse será OC, y tendrá un valor definido por:

$$m = M \times \text{sen}\varphi$$

- 4) Marcar los puntos horarios. Cada punto horario está definido por un par de coordenadas; una según el eje AB (X) y otra sobre el eje CD (Y). Estas coordenadas se calculan usando el ángulo horario de la hora a representar. El ángulo horario, a su vez, es la cantidad de horas que faltan hasta, o que pasaron desde el mediodía, multiplicado por 15° . Por ejemplo el ángulo horario para las 10 de la mañana es 30° . La coordenada X del punto horario se calcula como

$$X = M \times \text{sen}(t)$$

Donde:

t = ángulo horario respecto del medio día
(por ejemplo 15° para las 11 y la 1, 30° para las 10 y las 2, etc.)

Los valores de X son **positivos** hacia el Este y **negativos** hacia el Oeste.

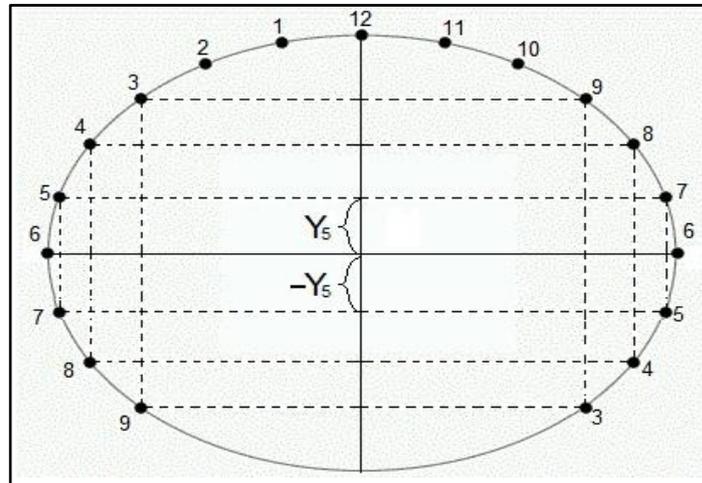
La coordenada Y del punto horario se calcula como:

$$Y = M \times \text{sen}(\varphi) \times \cos(t)$$

Los valores de Y son **positivos** hacia el Norte y **negativos** hacia el Sur.

- 6) Utilizar las coordenadas (X,Y) para ubicar los puntos horarios sobre la elipse.

- 7) Teniendo en cuenta que la elipse es simétrica, podemos agregar puntos horarios anteriores a las 6AM y posteriores a las 6PM, simplemente asignándoles las mismas coordenadas (X,Y) que los puntos horarios inmediatamente anteriores a las 6PM (4PM, 5PM) e inmediatamente posteriores a las 6AM (7AM, 8AM), sólo que cambiando el signo de la coordenada Y, ya que estos puntos horarios estarán por debajo del eje mayor, que corresponde al 0 de coordenadas según Y.



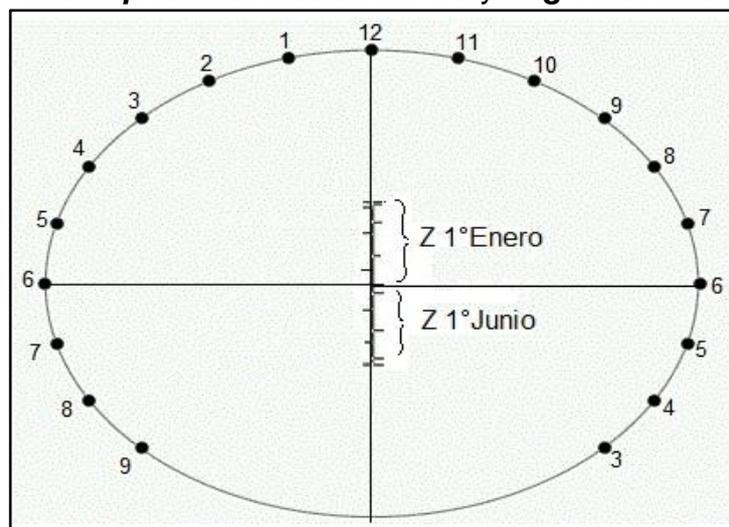
- 8) Una vez que se tienen ubicados los puntos horarios se necesita ubicar la grilla de fechas en el centro de la elipse. Para diseñar la grilla, se utiliza el valor Z que se calcula de la siguiente forma:

$$Z = M \times (\text{tg} \delta \times \cos \varphi)$$

Donde:

δ es la declinación del Sol para la fecha en cuestión.

Los valores de Z son **positivos** hacia el Norte y **negativos** hacia el Sur.



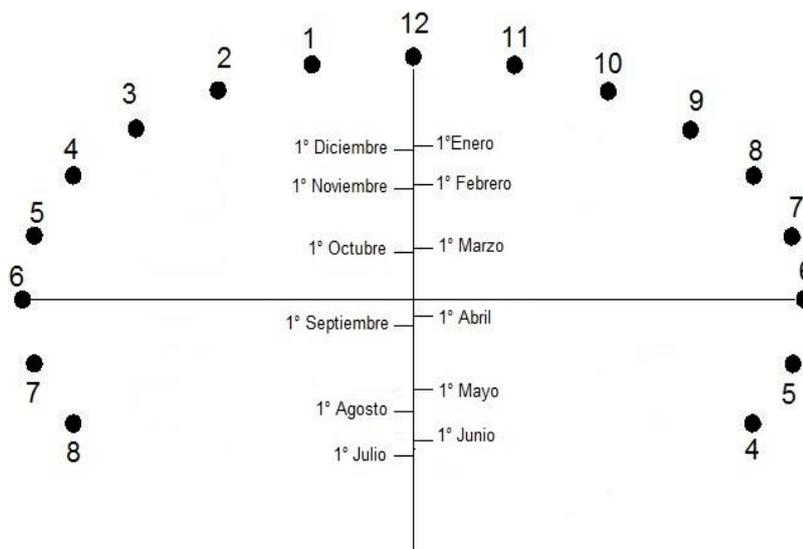
La varilla vertical, en este caso la persona, estará ubicada sobre la línea Norte-Sur, a la distancia Z del centro O de la elipse, correspondiente a la fecha en curso. La sombra proyectada por la persona desde ese lugar indicará la hora sobre la línea de puntos horarios.

Ejemplo para el Parque Lacunario Alejandro Martija, Chivilcoy, Pvcia. de Buenos Aires

- 1) Latitud= -34.836535°
- 2) Longitud= -60.101035°
- 3) Dimensiones de la elipse
 - Semieje mayor $M=1$
 - Semieje menor $m=0,57$
- 4) Puntos horarios y grilla de meses

Puntos Horarios			
Hora	Angulo horario	X	Y
06:00 AM	-90	-1,00	0,00
07:00 AM	-75	-0,97	-0,15
08:00 AM	-60	-0,87	-0,29
09:00 AM	-45	-0,71	-0,40
10:00 AM	-30	-0,50	-0,49
11:00 AM	-15	-0,26	-0,55
12:00 PM	0	0,00	-0,57
01:00 PM	15	0,26	-0,55
02:00 PM	30	0,50	-0,49
03:00 PM	45	0,71	-0,40
04:00 PM	60	0,87	-0,29
05:00 PM	75	0,97	-0,15
06:00 PM	90	1,00	0,00

Grilla de Meses	
Fecha	Z
01/ene	-0,35
01/feb	-0,26
01/mar	-0,11
01/abr	0,06
01/may	0,22
01/jun	0,33
21/jun	0,36
01/jul	0,35
01/ago	0,27
01/sep	0,12
01/oct	-0,04
01/nov	-0,21
01/dic	-0,33
21/dic	-0,36



La ventaja de hacer el diseño del reloj considerando un semieje mayor M con valor igual a 1 es que, como tanto el valor del semieje menor, como el de las coordenadas X , Y y Z dependen del valor de M , si se quisiera redimensionar el reloj para un tamaño dado, sólo

se necesita establecer la medida deseada del semieje mayor M , y luego multiplicar m y cada uno de los valores de X, Y y Z tabulados por el nuevo valor de M , como se muestra en el siguiente ejemplo.

Mismo ejemplo para un Semieje Mayor M de 2,5m:

- 1) Latitud=-34.836535°
- 2) Longitud=-60.101035°
- 3) Dimensiones de la elipse
 1. Semieje mayor $M=2,5m$
 2. Semieje menor $m=1,425m$
- 4) Puntos horarios y grilla de meses

Valor original de m multiplicado por el nuevo valor de M

Valores originales multiplicados por el nuevo valor de M

Puntos Horarios			
Hora	Angulo horario	X	Y
06:00 AM	-90	-2,50	0,00
07:00 AM	-75	-2,41	-0,37
08:00 AM	-60	-2,17	-0,71
09:00 AM	-45	-1,77	-1,01
10:00 AM	-30	-1,25	-1,24
11:00 AM	-15	-0,65	-1,38
12:00 PM	0	0,00	-1,43
01:00 PM	15	0,65	-1,38
02:00 PM	30	1,25	-1,24
03:00 PM	45	1,77	-1,01
04:00 PM	60	2,17	-0,71
05:00 PM	75	2,41	-0,37
06:00 PM	90	2,50	0,00

Grilla de Meses	
Fecha	Z
01/ene	-0,88
01/feb	-0,64
01/mar	-0,28
01/abr	0,15
01/may	0,54
01/jun	0,82
21/jun	0,89
01/jul	0,88
01/ago	0,67
01/sep	0,31
01/oct	-0,10
01/nov	-0,52
01/dic	-0,82
21/dic	-0,89

Bibliografía:

- Albert Waugh, *Sundials, their theory and Construction*, New York, Dover Publications Inc., 1973.
- René R. J. Rohr, *Sundials: History, Theory and Practice*, Toronto, University of Toronto Press, 1970.
- Chris Sangwin-Chris Budd, *Analemmatic sundials: How to build one and why they work*, +plus magazine, issue 11, June 2000.